

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

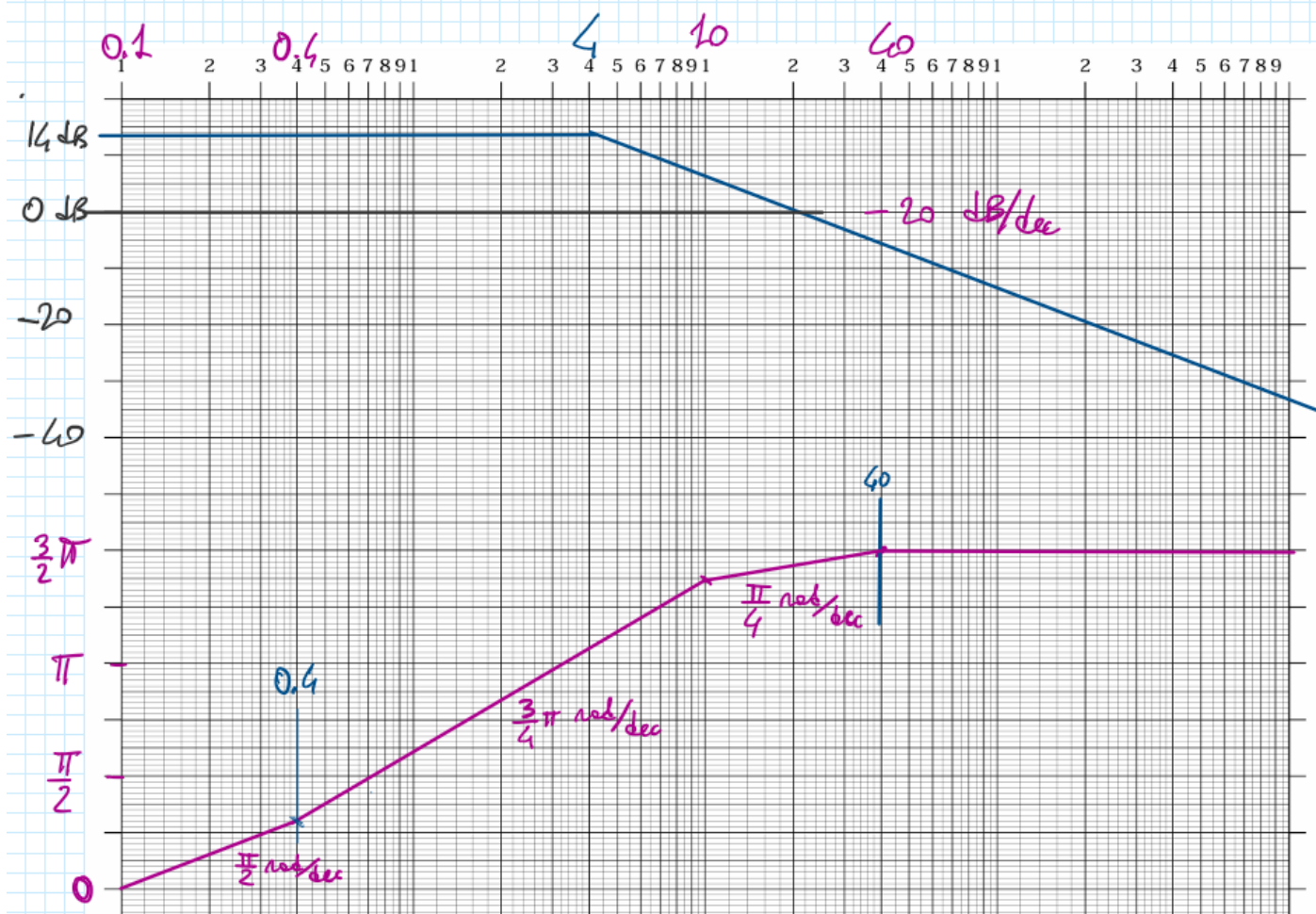
$$W(s) = \frac{K20(s+1)}{(s-1)(s-4)}$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$
2. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.
3. Si calcoli per quale pulsazione la fase di $W(j\omega)$, per $K = 1$, è pari a $\pi/2$.

$$W(j\omega) = K \cdot \frac{20}{4} \cdot \frac{1+j\omega}{(1-j\omega)(1-j\frac{\omega}{4})}$$

$$W(j0) = 5 = \frac{10}{2}$$

$$5|_{dB} = 10|_{dB} - 12|_{dB} \approx 14 \text{ dB}$$



$$W(j\omega) = 20k \frac{1+j\omega}{(1-j\omega)(4-j\omega)} = 20k \frac{(1+j\omega)^2(4+j\omega)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$$

$$= * (1-\omega^2+j2\omega)(4+j\omega) = * (4-4\omega^2-2\omega^2+j\omega(8+1-\omega^2))$$

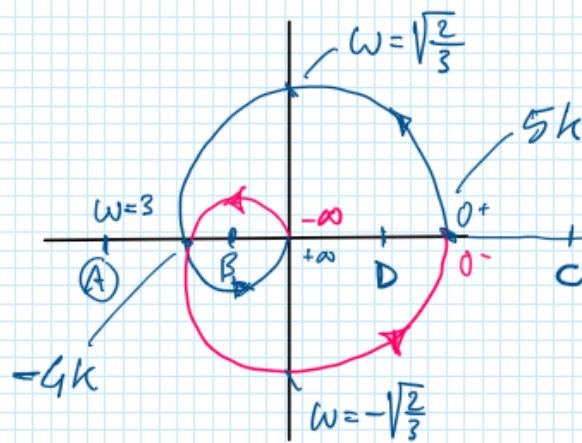
$$= k \cdot 20 \frac{4-6\omega^2+j\omega(9-\omega^2)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)} \Rightarrow \begin{aligned} \text{Im}(W(j\omega))=0 &\Rightarrow \omega=\pm 3 \\ \text{Re}(W(j\omega))=0 &\Rightarrow \omega=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\angle W(j\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{\pi}{2}$$

$$W(j3) = k \cdot 20 \frac{2(2-3 \cdot 9)}{(1+9)(16+9)} = -k \cdot 20 \frac{2 \cdot 25}{10 \cdot 25} = -4k$$

$$\begin{aligned} W_{ch} &= (s-1)(s-4) + 20k(s+1) = s^2 - 5s + 4 + 20ks + 20k \\ &= s^2 + (20k-5)s + 20k+4 \end{aligned}$$

	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	
1	+	+	+
$5 \cdot (4k-1)$	-	-	+
$4(5k+1)$	-	+	+
var.	1	2	0



(A) $-1 < -4k$ $k \in (0, \frac{1}{4})$, $N=0$, $M_{ch}^+ = 2-0 = 2$

(B) $-4k < -1$ $k > \frac{1}{4}$, $N=2$, $M_{ch}^+ = 2-2 = 0$

(C) $0 > 5k > -1$ $k \in (-\frac{1}{5}, 0)$, $N=0$, $M_{ch}^+ = 2-0 = 2$

(D) $-1 > 5k$ $k \in (-\infty, -\frac{1}{5})$, $N=1$, $M_{ch}^+ = 2-1 = 1$

Problema 2. (6 punti) Si considerino un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto, caratterizzati dalle stesse matrici A , B e C (con $D = 0$)

$$\text{T.C. } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad \text{T.D. } \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si calcolino le matrici di transizione $\Phi(k) = A^k$ e $\Phi(t) = e^{At}$ e le risposte impulsive dell'uscita dei due sistemi;
2. Si discutano le proprietà dei modi naturali dei due sistemi;
3. Si calcoli la risposta al gradino unitario del sistema a tempo discreto;
4. Si discuta l'esistenza della risposta armonica per entrambi i sistemi.

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \end{bmatrix}$$

$$P_A = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & +\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \lambda + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -2 \text{ eccitabile, osservabile} \quad \text{AS. in TC, Inv. e T.D.} \\ \lambda_2 = 1 \text{ Non eccitabile, osservabile} \quad \text{Inv. in TC, S.S. e T.D.}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} + e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$W(t) = C e^{At} B = e^{-2t} [2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} + e^t [2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = 2e^{-2t} \quad \text{T.C.}$$

$$W(k) = C A^{k-1} B = (-2)^{k-1} \cdot 2, \quad k \geq 0 \quad \text{T.D.}$$

$$W(z) = \frac{2}{z+2}, \quad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{(z+2)(z-1)} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{(z+2)(z-1)} = \frac{R_1}{z+2} + \frac{R_2}{z-1}$$

$$R_1 = \left. \frac{2}{z-1} \right|_{z=-2} = -\frac{2}{3}, \quad R_2 = \left. \frac{2}{z+2} \right|_{z=1} = \frac{2}{3}$$

$$Y(z) = \frac{2}{3} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+2} \right) \rightarrow Y(k) = \frac{2}{3} \cdot (1 - (-2)^k), \quad k \geq 0$$

Problema 3 (6 punti)

Si dato un sistema a tempo discreto con ingresso e uscita scalari, caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(k) = (0.1)^k - (-0.2)^k, \quad k \geq 0.$$

Si calcolino le risposte armoniche agli ingressi $u(k) = \cos((\pi/2)k)$ e $u(k) = \cos(\pi k)$.

$$W(z) = \frac{z}{z-0.1} - \frac{z}{z+0.2} = z \cdot \frac{z+0.2-(z-0.1)}{(z-0.1)(z+0.2)}$$

$$W(z) = \frac{0.3z}{(z-0.1)(z+0.2)}$$

$$u(k) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \quad e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \quad W(j) = \frac{0.3j}{(j-0.1)(j+0.2)}$$

$$W(j) = \frac{0.3j}{-0.02-1+j(0.2-0.1)} = \frac{0.3j}{-1.02+j0.1}$$

$$|W(j)| = \frac{0.3}{\sqrt{1.02^2 + 0.1^2}} \quad \angle W(j) = \frac{\pi}{2} - \left(\text{ATAN}\left(-\frac{0.1}{1.02}\right) + \pi \right)$$

$$\angle W(j) = -\frac{\pi}{2} + \text{ATAN}\left(\frac{0.1}{1.02}\right)$$

PARTE REALE
NEGATIVA

$$u(k) = \cos(\pi k) \quad e^{j\pi} = -1$$

$$W(-1) = \frac{0.3(-1)}{(-1.1)(-1+0.2)} = \frac{-0.3}{1.1 \cdot 0.8} = -\frac{0.3}{0.88} \simeq -0.34$$

$$\angle W(-1) = \pi$$

$$y_A(k) = 0.34 \cos(\pi k + \pi) = -0.34 \cos(\pi k)$$

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_A = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$.
4. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_B = [0 \ -1 \ 1 \ -1]^T$.
5. Esporre il motivo per cui in un sistema di dimensione n , con un ingresso scalare, il vettore $A^n B$ è sempre raggiungibile. In alternativa, spiegare perché se uno stato $\bar{x}$ non è raggiungibile in n passi, allora non può esserlo nemmeno in $n+1$ passi.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(P_4) = 2$$

$B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 1] \quad R = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$CA = [-1 \ 1 \ 0 \ -1] \quad CA^2 = [0 \ -1 \ 1 \ 1] \quad Q = \mathcal{N}(Q_4) = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$CA^3 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$p(Q_4) = 3 \quad \mathcal{X}_4 = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \{\emptyset\}$$

$$x_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -B : \text{raggiungibile in un passo (con } u(0) = -1)$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -B - AB : \text{raggiungibile in due passi (con } u(0) = u(1) = -1)$$

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k(k-1)x_1(t) + 2x_1^3(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2(t) - kx_2(t). \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$.

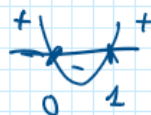
Quesito 5b. Si dica per quali valori di α e β le seguenti forme quadratiche sono definite positive

$$10x_1^2 + \alpha x_2^2 - x_1x_2, \quad 10x_1^2 + 2x_2^2 - \beta x_1x_2.$$

$$f = \begin{bmatrix} 2x_1^3 \cdot x_2 + k(k-1)x_1 \\ -x_1^4 - x_1^2x_2 - kx_2 \end{bmatrix}$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} k(k-1) & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$k(k-1) < 0$$



A.S. per $k \in (0, 1)$

Imp. per $k \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Con. conflu.

$k=0$ e $k=1$

$$k=0 \quad \dot{x}_1 = 2x_1^3x_2 +$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^4 - x_1^2x_2$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\alpha}{2}x_2^2 \quad \frac{dV}{dx} \dot{x} = x_1(2x_1^3x_2) - \alpha x_1^4x_2 - \alpha x_1^2x_2^2$$

$$\alpha=2 \quad \dot{V} = -2x_1^2x_2^2 \leq 0 \quad \text{S.S.}$$

$$\alpha=2$$

$$k=1 \quad \dot{V} = -2x_1^4x_2^2 - 2x_2^3 \leq 0 \quad \text{S.S.}$$

$$10x_1^2 + \alpha x_2^2 - x_1x_2 \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 10 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}$$

$$|Q| = \alpha \cdot 10 - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \boxed{\alpha > \frac{1}{40}}$$

$$10x_1^2 + 2x_2^2 - \beta x_1x_2 \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 10 & -\frac{\beta}{2} \\ -\frac{\beta}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$|Q| = 20 - \frac{\beta^2}{4} > 0 \quad \beta^2 < 80 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \Rightarrow \beta \in (-4\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$$