

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K \frac{20(s+1)}{(s-1)(s-4)}$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$
2. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.
3. Si calcoli per quale pulsazione ω la fase di $W(j\omega)$ (per $K > 0$) è pari a $\pi/2$.

Forma di Bode e osservazioni preliminari ($K=1$).

Sia $\widetilde{W}(s)$ la funzione di trasferimento a ciclo aperto per $K = 1$. Portando i fattori in forma a costante di tempo, si ha la forma di Bode

$$\widetilde{W}(s) = \frac{20(s+1)}{(s-1)(s-4)} = \frac{20(s+1)}{4(1-s)(1-\frac{s}{4})} = \frac{5(1+s)}{(1-s)(1-\frac{s}{4})}.$$

Sostituendo $s = j\omega$:

$$\widetilde{W}(j\omega) = \frac{5(1+j\omega)}{(1-j\omega)(1-j\frac{\omega}{4})}.$$

Il guadagno di Bode è 5. Il calcolo approssimato in dB si fa considerando che $5 = 10/2$ e utilizzando l'approssimazione $20 \log_{10}(2) \approx 6 \text{ dB}$, da cui

$$20 \log_{10}(10/2) = 20 \log_{10}(10) - 20 \log_{10}(2) \approx 20 - 6 = 14 \text{ dB}.$$

Il calcolo esatto, con calcolatrice, fornisce $20 \log_{10} 5 = 13.98 \text{ dB}$.

Vi sono uno zero in $s = -1$ ($\omega_z = 1$) e *due poli a parte reale positiva* in $s = 1$ e $s = 4$ ($\omega_p = 1$ e $\omega_p = 4$). Osserviamo che i moduli dei termini $(1+j\omega)$ a numeratore e $(1-j\omega)$ a denominatore si semplificano:

$$|W(j\omega)| = \frac{5\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+\omega^2/16}} = \frac{5}{\sqrt{1+(\omega/4)^2}}.$$

Quindi, lo zero in $\omega = 1$ e il polo in $\omega = 1$ hanno lo stesso modulo e si *cancellano in ampiezza* (ma non in fase). Il modulo è quindi piatto a $13.98 \approx 14 \text{ dB}$ fino a $\omega = 4$, poi scende con pendenza -20 dB/dec .

La fase invece somma i contributi (tutti *positivi*, perché lo zero è a sinistra ma i due poli sono a destra dell'asse immaginario nel piano complesso):

$$\angle W(j\omega) = \underbrace{\arctan \omega}_{\text{zero}} + \underbrace{\arctan \omega}_{\text{polo } s=1} + \underbrace{\arctan(\omega/4)}_{\text{polo } s=4} = 2 \arctan \omega + \arctan \frac{\omega}{4},$$

che cresce monotonamente da 0 ($\omega = 0$) a $+270^\circ$ ($3\pi/2 \text{ rad}$) ($\omega \rightarrow \infty$). I diagrammi sono riportati in Figura 1.

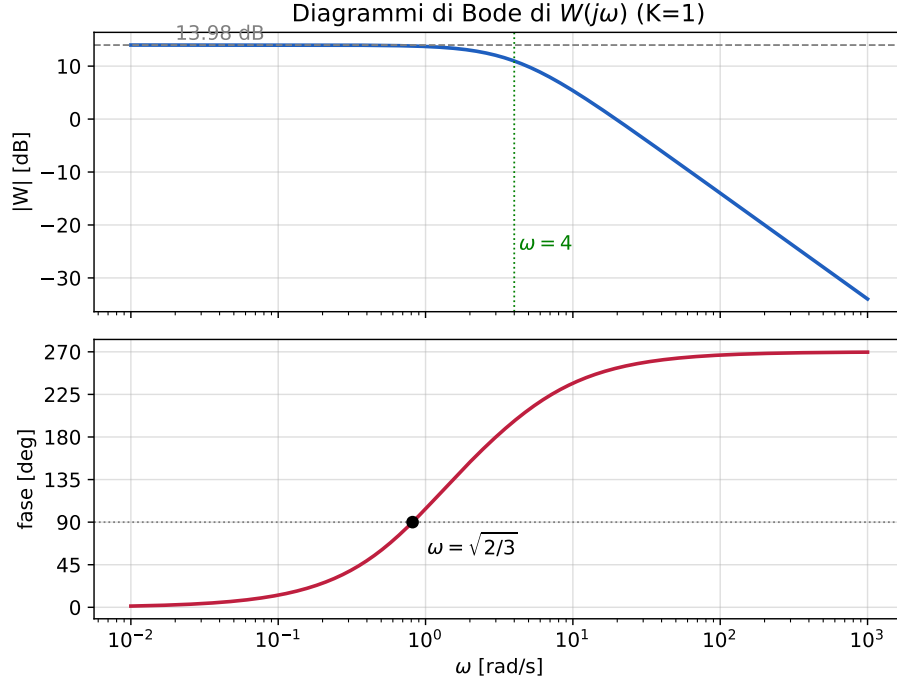


Figura 1: Diagrammi di Bode di $W(j\omega)$ per $K = 1$.

Diagramma polare.

Razionalizzando (Den= $(4 - \omega^2)^2 + 25\omega^2 = (\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16) > 0$)

$$W(j\omega) = \frac{(80 - 120\omega^2) + j 20\omega(9 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)} = \frac{40(2 - 3\omega^2) + j 20\omega(9 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)}$$

è possibile calcolare facilmente le intersezioni con l'asse reale, imponendo $\text{Im}(W(j\omega)) = 0$, e con l'asse immaginario, imponendo $\text{Re}(W(j\omega)) = 0$:

$$\omega = 0 : W = 5; \quad \text{Re} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{2/3} \Rightarrow W = +j 4.9; \quad \text{Im} = 0 \Rightarrow \omega = 3 \Rightarrow W = -4.$$

Poiché $|W|$ decresce da 5 a 0 e la fase cresce da 0 a $3\pi/2$ rad, il grafico è una “spirale” che attraversa l'asse reale negativo *solo* in -4 (per $\omega = \pm 3$). Vedi Figura 2.

Poli instabili a ciclo chiuso al variare di K — criterio di Routh.

Il calcolo del polinomio caratteristico a ciclo chiuso (denominatore $D_{CH}(s) = D_{AP} + KN_{AP}$) dà

$$D_{CH}(s) = (s - 1)(s - 4) + 20K(s + 1) = s^2 + (20K - 5)s + (4 + 20K).$$

Per un polinomio di 2° grado $s^2 + a_1s + a_0$ i segni della prima colonna di Routh sono $\{1, a_1, a_0\}$; il numero di radici a parte reale positiva è il numero di variazioni di segno. Per il denominatore $D_{CH}(s)$ si ha

$$a_1 = 20K - 5, \quad a_0 = 4 + 20K.$$

Il calcolo del numero di poli a parte reale positiva n_{CH}^+ per diversi intervalli di K è dato dalla tabella

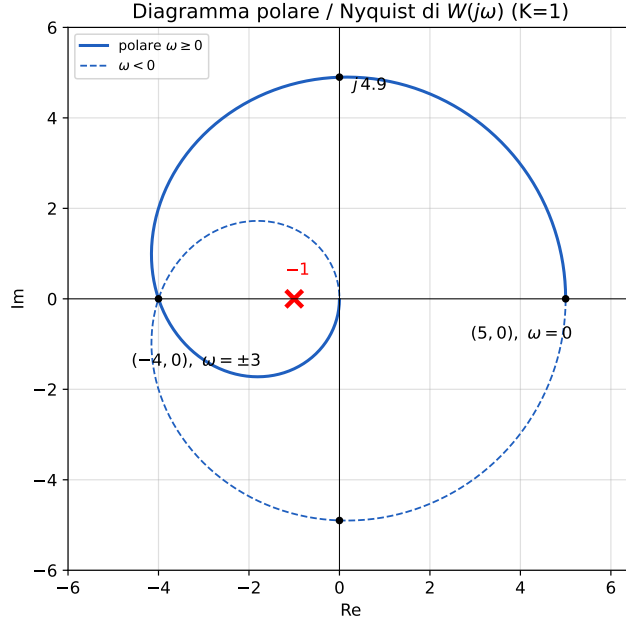


Figura 2: Diagramma polare ($\omega \geq 0$, linea piena) e completamento di Nyquist ($\omega < 0$, tratteggio) per $K = 1$.

seguinte

intervallo di K	1	$20K - 5$	$4 + 20K$	n_{CH}^+
$K < -\frac{1}{5}$	+	-	-	1
$-\frac{1}{5} < K < \frac{1}{4}$	+	-	+	2
$K > \frac{1}{4}$	+	+	+	0

Casi limite: $K = \frac{1}{4}$ dà $s^2 + 9 = 0$, poli $\pm j3$ sull'asse immaginario ($n_{CH}^+ = 0$); $K = -\frac{1}{5}$ dà $s(s - 9) = 0$, un polo in 0 e uno in +9 ($n_{CH}^+ = 1$). **Il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile per $K > \frac{1}{4}$.**

Verifica con il criterio di Nyquist.

La funzione di trasferimento a catena aperta ha 2 poli a parte reale positiva ($n_{AP}^+ = 2$). La formula di Nyquist dice che il numero di poli a parte reale positiva a ciclo chiuso è apri a

$$n_{CH}^+ = n_{AP}^+ - N = 2 - N,$$

dove N = numero di giri in senso *antiorario* del diagramma di $W(j\omega)$ attorno a -1 . Sia $\widetilde{W}(j\omega) = W(j\omega)/K$. Il diagramma di $\widetilde{W}(j\omega)$ interseca l'asse reale in +5 ($\omega = 0$) e in -4 ($\omega = \pm 3$); scalando per K le intersezioni sono $5K$ e $-4K$. Andando a considerare i casi in cui il punto critico -1 si trova a destra o a sinistra delle intersezioni, Possiamo contare i giri N :

K	giri di $K\widetilde{W}$ attorno a -1	$n_{CH}^+ = n_{AP}^+ - N$
$K > \frac{1}{4}$	$N = 2$	0
$-\frac{1}{5} < K < \frac{1}{4}$	$N = 0$	2
$K < -\frac{1}{5}$	$N = 1$	1

in perfetto accordo con Routh.

Pulsazione con fase $= \pi/2$ (per $K > 0$).

La fase vale $\pi/2$ quando $\text{Re}(W(j\omega)) = 0$ con $\text{Im}(W > 0)$:

$$80 - 120\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\omega^* = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \simeq 0.816 \text{ rad/s}}.$$

Problema 2. (6 punti) Si considerino un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto, caratterizzati dalla stesse matrici A , B e C (con $D = 0$)

$$\text{T.C.} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad \text{T.D.} \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Si calcolino le matrici di transizione $\Phi(k) = A^k$ e $\Phi(t) = e^{At}$ e le risposte impulsive dell'uscita dei due sistemi;
2. Si discutano le proprietà dei modi naturali dei due sistemi;
3. Si calcoli la risposta al gradino unitario del sistema a tempo discreto;
4. Si discuta l'esistenza della risposta armonica per entrambi i sistemi.

Struttura modale.

La matrice A ha due autovalori reali: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$:

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

I relativi autovettori destri si ottengono risolvendo i problemi $(\lambda_i I - A)r_i = 0$, per $i = 1, 2$, e sono

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri si possono calcolare risolvendo i problemi $\ell_i^\top (\lambda_i I - A) = 0$, per $i = 1, 2$, con il vincolo $\ell_i^\top r_i = 1$. In alternativa si possono ottenere estraendo le righe dall'inversa della matrice $R = [r_1 \ r_2]$:

$$L = R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1^\top \\ \ell_2^\top \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -2, \quad r_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ell_1^\top = \frac{1}{2} [1 \quad 1] \\ \lambda_2 = 1, \quad r_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \ell_2^\top = \frac{1}{2} [1 \quad -1]. \end{aligned}$$

(Nota: A è simmetrica, e pertanto gli autovettori r_1 e r_2 sono ortogonali)

1) *Matrici di transizione e risposte impulsive.*

$$A^k = (-2)^k r_1 \ell_1^\top + (1)^k r_2 \ell_2^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-2)^k + 1 & (-2)^k - 1 \\ (-2)^k - 1 & (-2)^k + 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = e^{-2t} r_1 \ell_1^\top + e^t r_2 \ell_2^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2t} + e^t & e^{-2t} - e^t \\ e^{-2t} - e^t & e^{-2t} + e^t \end{bmatrix}.$$

Calcolo delle risposte impulsive:

$$w_{\text{TC}}(t) = C e^{At} B = 2 e^{-2t}, \quad t \geq 0,$$

$$w_{\text{TD}}(k) = C A^{k-1} B = 2(-2)^{k-1}, \quad k > 0.$$

(Nota: poiché $D = 0$, per $k = 0$ si ha $w_{TD}(0) = 0$).

Si può vedere che in entrambe le risposte impulsive è presente solo uno dei due modi naturali del sistema. Il motivo sarà chiaro quando si risponderà alla domanda sulle proprietà dei modi naturali (punto 2). Infatti, si verifica che il prodotto $\ell_2^\top B = 0$, da cui segue che il modo associato all'autovalore $\lambda_2 = 1$ risulta non eccitabile (sia a tempo continuo che a tempo discreto), e quindi non è presente nella risposta impulsiva. Il calcolo delle risposte impulsive può essere anche svolto a partire dalla decomposizione spettrale delle matrici di transizione dello stato:

$$w_{TC}(t) = C e^{At} B = C(e^{-2t} r_1 \ell_1^\top + e^t r_2 \ell_2^\top) B = e^{-2t} C r_1 \ell_1^\top B + e^t C r_2 \ell_2^\top B, \quad t \geq 0,$$

$$w_{TD}(k) = C A^{k-1} B = C((-2)^{k-1} r_1 \ell_1^\top + 1^{k-1} r_2 \ell_2^\top) B = (-2)^{k-1} C r_1 \ell_1^\top B + C r_2 \ell_2^\top B, \quad k > 0.$$

Poiché $\ell_2^\top B = 0$ (modo non eccitabile), le espressioni si semplificano:

$$w_{TC}(t) = e^{-2t} C r_1 \ell_1^\top B = 2 e^{-2t}, \quad t \geq 0,$$

$$w_{TD}(k) = (-2)^k C r_1 \ell_1^\top B = 2(-2)^{k-1}, \quad k > 0.$$

2) Proprietà dei modi naturali.

Stabilità (notazioni: A.S.: Asintoticamente Stabile; S.S.: Semplicemente Stabile; Inst.: Instabile)

	modo $\lambda_1 = -2$	modo $\lambda_2 = +1$
T.C. ($e^{\lambda t}$)	e^{-2t} : A.S. ($\text{Re}(-2) < 0$)	e^t : Inst. ($\text{Re}(1) > 0$)
T.D. (λ^k)	$(-2)^k$: Inst. ($ -2 > 1$)	$1^k = 1$: S.S. ($ 1 = 1$)

Entrambi i sistemi sono instabili: in T.C. per l'autovalore $+1$ (semipiano destro), in T.D. per l'autovalore -2 (fuori dal cerchio unitario). In T.D. il modo “1” è al limite di stabilità (sul cerchio unitario).

Eccitabilità e osservabilità

$$\lambda_1 = -2 : \begin{cases} \ell_1^\top B = 1 \neq 0 & \text{modo eccitabile} \\ C r_1 = 2 \neq 0 & \text{modo osservabile} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 1 : \begin{cases} \ell_2^\top B = 0 & \text{modo non eccitabile} \\ C r_2 = 2 \neq 0 & \text{modo osservabile} \end{cases}$$

3) Risposta forzata al gradino unitario a tempo discreto

La funzione di trasferimento a tempo discreto e la trasformata del gradino unitario sono

$$W_{TD}(z) = \mathcal{Z}(w_{TD}(k)) = \frac{2}{z+2}, \quad U(z) = \frac{z}{z-1}.$$

La trasformata della risposta al gradino è

$$Y(z) = W_{TD}(z)U(z) = \frac{2z}{(z+2)(z-1)}$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y(z)/z$ è

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{(z+2)(z-1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \right)$$

da cui

$$Y(z) = \frac{2}{3} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} \right) \implies y(k) = \frac{2}{3} (1 - (-2)^k), \quad k \geq 0.$$

4) *Esistenza della risposta armonica.*

Le funzioni di trasferimento a tempo continuo e a tempo discreto sono

$$W_{TC}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2}{s+2}, \quad W_{TD}(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{2}{z+2}.$$

In entrambe non compare il polo $\lambda_2 = 1$ in quanto non eccitabile dall'ingresso.

Poiché entrambi i sistemi sono internamente instabili (come discusso al punto 2), la risposta armonica dello stato non esiste per entrambi. Matematicamente si potrebbe definire la risposta armonica dell'uscita qualora tutti i modi instabili o semplicemente stabili non siano osservabili dall'uscita. In questo caso però occorre tenere conto che in questi casi, mentre si osserva un'uscita che asintoticamente tende ad una sinusoide, lo stato del sistema potrebbe contenere una parte inosservabile che diverge, in quanto instabile.

Analizziamo separatamente i due casi a tempo continuo e a tempo discreto.

Sistema a tempo continuo:

Sulla base della sola funzione di trasferimento il sistema appare stabile, in quanto ha un unico polo in $s = -2$, stabile in quanto a parte reale negativa. In questo caso il sistema è detto Input-Output stabile, o *esternamente stabile*. Sappiamo però che il sistema è internamente instabile, in quanto c'è un modo instabile (non eccitabile), associato all'autovalore $\lambda_2 = 1$, a parte reale positiva. Pertanto la risposta armonica dello stato non esiste. In questo caso non esiste nemmeno la risposta armonica dell'uscita, in quanto anche se il modo instabile non è eccitabile dall'ingresso, la componente di evoluzione libera sull'uscita associata a tale modo, che è osservabile dall'uscita, non converge a zero.

Sistema a tempo discreto:

In questo caso il polo della funzione di trasferimento risulta instabile, in quanto ha un modulo maggiore di 1. Questa considerazione è sufficiente per affermare che il sistema non ammette risposta armonica.

Problema 3 (6 punti)

Si dato un sistema a tempo discreto con ingresso e uscita scalari, caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(k) = (0.1)^k - (-0.2)^k, \quad k \geq 0.$$

Si calcolino le risposte armoniche agli ingressi $u(k) = \cos((\pi/2)k)$ e $u(k) = \cos(\pi k)$.

Funzione di trasferimento.

Con la trasformata Zeta: $\sum_k a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a}$:

$$W(z) = \frac{z}{z-0.1} - \frac{z}{z+0.2} = \frac{0.3z}{(z-0.1)(z+0.2)}.$$

I poli $z = 0.1$ e $z = -0.2$ sono *interni* al cerchio unitario: il sistema è stabile dal punto di vista Ingresso-Uscita, e la risposta armonica esiste. Per l'ingresso $u(k) = \cos(\omega k)$ la risposta a regime è $y_{ss}(k) = |W(e^{j\omega})| \cos(\omega k + \angle W(e^{j\omega}))$.

Ingresso $u(k) = \cos(\frac{\pi}{2}k) \Rightarrow \omega = \pi/2, e^{j\omega} = j$.

$$W(j) = \frac{0.3j}{(j-0.1)(j+0.2)} = \frac{0.3j}{-1.02 + 0.1j} = 0.0286 - 0.2913j.$$

Per il calcolo del modulo e della fase della $W(j)$ è possibile utilizzare in modo equivalente una qualsiasi di queste tre espressioni. Utilizzando la prima si ha

$$|W(j)| = \frac{0.3}{\sqrt{1.01}\sqrt{1.04}} = 0.2927,$$

$$\begin{aligned} \angle W(j) &= \langle j \rangle - \langle j-0.1 \rangle - \langle j+0.2 \rangle \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(\arctan\left(-\frac{1}{0.1}\right) + \pi \right) - \arctan\left(\frac{1}{0.2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan(10) - \pi - \arctan(5) = -1.473 \text{ rad.} \end{aligned}$$

$$y_{ss}(k) = 0.2927 \cos\left(\frac{\pi}{2}k - 1.473\right)$$

Ingresso $u(k) = \cos(\pi k) \Rightarrow \omega = \pi, e^{j\omega} = -1$.

$$W(-1) = \frac{-0.3}{(-1.1)(-0.8)} = \frac{-0.3}{0.88} = -0.3409 \quad (\text{reale negativo}).$$

Modulo 0.3409, fase π .

Nota che $u(k) = \cos(\pi k) = (-1)^k$ e $\cos(\pi k + \pi) = -\cos(\pi k)$.

Forme equivalenti per la risposta armonica

$$y_{ss}(k) = 0.3409 \cos(\pi k + \pi) = -0.3409 \cos(\pi k) = -0.3409 (-1)^k.$$

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
 2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
 3. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_A = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^\top$.
 4. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_B = [0 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^\top$.
 5. Esporre il motivo per cui in un sistema di dimensione n , con un ingresso scalare, il vettore $A^n B$ è sempre raggiungibile. In alternativa, spiegare perché se uno stato $\bar{x}$ non è raggiungibile in n passi, allora non può esserlo nemmeno in $n+1$ passi.
-

Calcoli preliminari.

Applicando A ripetutamente a B :

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A^3B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = B.$$

La matrice di raggiungibilità $P_4 = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ è

$$P_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si osserva che $A^2B = -B - AB$ e $A^3B = B$, e quindi in P_4 solo le prime due colonne sono linearmente indipendenti (rango 2).

1) *Sottospazio raggiungibile e sottospazio inosservabile.*

Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{R} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ ha rango 2, ed è generato dalle prime due colonne di P_4 :

$$\mathcal{R} = \text{span}\{B, AB\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

La matrice di osservabilità Q_4 è

$$Q_4 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed ha rango 3, e pertanto il nucleo $\text{Ker}(Q_4)$ è generato da un unico vettore di base $\bar{x}$, tale da annullare il prodotto $Q_4\bar{x} = 0$. Risolvendo, si ha

$$\mathcal{Q} = \text{Ker}(Q_4) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim = 1.$$

(Nota: vale a dire che combinando linearmente le righe di Q_4 con i coefficienti $-1, 0, -1, 1$ si ha il vettore nullo).

2) *Decomposizione strutturale di Kalman.*

È facile vedere che il vettore che genera $\mathcal{Q}$ è linearmente indipendente dai due vettori che generano $\mathcal{R}$ (la matrice 4×3 che si ottiene affiancando i tre vettori ha rango 3).

Si ha quindi $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \{0\}$. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 \text{ (ragg. \& non oss.)} &= \mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \{0\}, & \dim &= 0, \\ \mathcal{X}_2 \text{ (ragg. \& oss.)} &= \mathcal{R} = \text{span}\{[-1, 1, -1, 1]^\top, [1, 0, 0, 0]^\top\}, & \dim &= 2, \\ \mathcal{X}_3 \text{ (non ragg. \& non oss.)} &= \mathcal{Q} = \text{span}\{[-1, 0, -1, 1]^\top\}, & \dim &= 1, \\ \mathcal{X}_4 \text{ (non ragg. \& oss.)} &= \text{span}\{[0, 0, 1, 0]^\top\} \text{ (un complemento)}, & \dim &= 1. \end{aligned}$$

($\mathcal{X}_1, \mathcal{R}, \mathcal{Q}$ sono univoci; $\mathcal{X}_4$ è un qualunque complemento di $\mathcal{R} + \mathcal{Q}$ in $\mathbb{R}^4$.)

3) *In quanti passi è raggiungibile $\bar{x}_A = [1, -1, 1, -1]^\top$.*

4) *In quanti passi è raggiungibile $\bar{x}_B = [0, -1, 1, -1]^\top$.*

Per rispondere a questi due punti è opportuno ricordare la formula della risposta forzata dello stato a tempo discreto

$$x(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-1-h} B u(h) = B u(k-1) + A B u(k-2) + A^2 B u(k-3) + \dots + A^{k-1} u(0)$$

che in forma matriciale si scrive

$$x(k) = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{k-1} B] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Da questa formula si vede che lo spazio degli stati raggiungibili in k passi, indicato con $\mathcal{R}_k$, è

$$\mathcal{R}_k = \text{Im}(P_k), \quad \text{dove} \quad P_k = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{k-1} B].$$

P_k è la matrice di raggiungibilità in k passi.

Poiché $P_{k+1} = [P_k \ A^k B]$, si ha $\mathcal{R}_{k+1} = \text{Im}(P_k) + \text{Im}(A^k B)$, ovvero $\mathcal{R}_{k+1} = \mathcal{R}_k + \text{Im}(A^k B)$.

Segue che $\mathcal{R}_k \subseteq \mathcal{R}_{k+1}$.

Ricordiamo anche che $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n$ e che $\mathcal{R}_k \subseteq \mathcal{R}_n$, per ogni $k \geq 1$.

3) *In quanti passi è raggiungibile $\bar{x}_A = [1, -1, 1, -1]^\top$.*

Si ha $P_1 = B$. E' immediato osservare che $\bar{x}_A = -B$, e quindi $\bar{x}_A \in \mathcal{R}_1$, ovvero appartiene allo spazio degli stati raggiungibili in un solo passo.

Quindi, $\bar{x}_A$ è raggiungibile in **1 passo**, e in particolare con $u(0) = -1$, in modo che $x(1) = B u(0) = -B$.

4) In quanti passi è raggiungibile $\bar{x}_B = [0, -1, 1, -1]^\top$.

Si ha $\bar{x}_B \notin \mathcal{R}_1$ (non è multiplo di B) ma $\bar{x}_B = -B - AB$. Quindi $\bar{x}_B \in \mathcal{R}_2 = \text{Im}([B \ AB])$, e pertanto è raggiungibile in **2 passi**, con $u(0) = -1$, $u(1) = -1$,

$$x(2) = AB u(0) + B u(1) = -AB - B = \bar{x}_B.$$

5) Perché $A^n B$ è sempre raggiungibile.

Indicando con a_i , $i = 0, \dots, n-1$ i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice A

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0,$$

per il teorema di Cayley–Hamilton si ha

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n \times n}.$$

Da cui

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1 A - a_0 I_n$$

e, moltiplicando entrambi i membri per B

$$A^n B = -(a_{n-1}A^{n-1}B + \dots + a_1 AB + a_0 B) \in \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = \mathcal{R}.$$

Cioè $A^n B$ è combinazione lineare delle colonne di P_n , e quindi appartiene al sottospazio raggiungibile ed è quindi raggiungibile. Di conseguenza $\mathcal{R}_{n+1} = \text{span}\{B, \dots, A^n B\} = \mathcal{R}_n$.

Analogamente si dimostra che $\mathcal{R}_{n+2} = \text{span}\{B, \dots, A^n B\} = \mathcal{R}_n$, e anche $\mathcal{R}_{n+k} = \text{span}\{B, \dots, A^n B\} = \mathcal{R}_n$, per ogni $k \geq 1$. Quindi la catena di sottospazi $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq \dots$ è non decrescente e necessariamente smette di crescere a partire da n :

$$\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1} = \dots = \mathcal{R}_{n+k} = \mathcal{R}$$

Perciò se uno stato $\bar{x}$ non è raggiungibile in n passi, non lo è neppure in $n+1$, né in $n+k$ passi, con $k \geq 0$ arbitrario.

Problema 5. (6 punti)

Quesito 5a. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k(k-1)x_1(t) + 2x_1^3(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2(t) - kx_2(t). \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$.

Quesito 5b. Si dica per quali valori di α e β le seguenti forme quadratiche sono definite positive

$$10x_1^2 + \alpha x_2^2 - x_1 x_2, \quad 10x_1^2 + 2x_2^2 - \beta x_1 x_2.$$

Metodo indiretto (linearizzazione in $x_e = (0, 0)$).

$$f(x, k) = \begin{bmatrix} k(k-1)x_1 + 2x_1^3x_2, \\ -x_1^4 - x_1^2x_2 - kx_2 \end{bmatrix}.$$

Lo Jacobiano nell'origine è diagonale:

$$J = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 = \begin{bmatrix} k(k-1) & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = k(k-1), \quad \lambda_2 = -k.$$

valori di k	$\lambda_1 = k(k-1)$	$\lambda_2 = -k$	conclusione
$k < 0$	> 0	> 0	instabile
$0 < k < 1$	< 0	< 0	asint. stabile
$k > 1$	> 0	< 0	instabile
$k = 0$	0	0	caso critico (da approfondire)
$k = 1$	0	-1	caso critico (da approfondire)

Metodo diretto (Lyapunov) per i casi critici.

Si sceglie la forma quadratica definita positiva $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\alpha}{2}x_2^2$, con $\alpha > 0$ da determinare. Il calcolo della derivata della $V(x)$ lungo il vettore $f(x, k)$ è:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \right] f(x, k) \\ &= [x_1 \quad \alpha x_2] \begin{bmatrix} k(k-1)x_1 + 2x_1^3x_2 \\ -x_1^4 - x_1^2x_2 - kx_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per risolvere i due casi indeterminati ($k = 0$ e $k = 1$) occorrerebbe analizzare il segno della $\dot{V}(x)$ solo per questi due valori. Vediamo però che succede lasciando il parametro k indeterminato:

$$\dot{V}(x) = k(k-1)x_1^2 + 2x_1^4x_2 - \alpha x_1^4x_2 - \alpha x_1^2x_2^2 - \alpha kx_2^2$$

Tutti i termini sono determinati in segno, eccetto il termine $x_1^4x_2$, che può essere positivo o negativo a seconda del segno di x_2 . Per eliminare tale termine è sufficiente porre $\alpha = 2$:

$$\dot{V}(x) = k(k-1)x_1^2 + \underbrace{2x_1^4x_2 - 2x_1^4x_2}_{=0} - 2x_1^2x_2^2 - 2kx_2^2 = k(k-1)x_1^2 - 2kx_2^2 - 2x_1^2x_2^2.$$

La $\dot{V}(x)$ è definita negativa per per tutti i valori di k tali che $k(k-1) < 0$, e quindi per $0 < k < 1$. Pertanto, rimane confermata l'analisi ottenuta con gli autovalori dello Jacobiano, ovvero che il punto di equilibrio $x \neq 0$ è *asintoticamente stabile* per $k \in (0, 1)$.

Anzi, l'analisi con la funzione di Lyapunov consente anche di asserire la stabilità asintotica globale, in quanto la funzione $V(x)$ è radialmente illimitata.

Casi critici:

- $k = 1$: $\dot{V} = -2x_2^2(1 + x_1^2) \leq 0$ (semidefinita negativa).
- $k = 0$: $\dot{V} = -2x_1^2x_2^2 \leq 0$ (semidefinita negativa)

In entrambi casi $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa, che è condizione sufficiente per asserire la stabilità semplice del punto di equilibrio.

Quadro riassuntivo.

$k < 0$	instabilità
$k = 0$	stabilità semplice
$0 < k < 1$	stabilità asintotica
$k = 1$	stabilità semplice
$k > 1$	instabilità

(Nota: ci sono altri teoremi e considerazioni, non in programma (Estensione di La Salle al Teorema di Lyapunov) che consentono di andare più a fondo nei casi critici).

Quesito 5b — segno delle forme quadratiche.

Ricordiamo che una forma quadratica $a x_1^2 + b x_2^2 + c x_1 x_2$ può essere scritta mediante la matrice Q

$$Q = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \quad a x_1^2 + b x_2^2 + c x_1 x_2 = x^\top Q x,$$

Il criterio di Sylvester sulla matrice Q afferma che la forma quadratica è definita positiva se e solo se $a > 0$ e $|Q| > 0$, ovvero $ab - \frac{c^2}{4} > 0$. Applicando il criterio alle due forme quadratiche del testo si ha

$$10x_1^2 + \alpha x_2^2 - x_1 x_2 : \quad a = 10 > 0, \quad 10\alpha - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \boxed{\alpha > \frac{1}{40}};$$

$$10x_1^2 + 2x_2^2 - \beta x_1 x_2 : \quad a = 10 > 0, \quad 20 - \frac{\beta^2}{4} > 0 \Rightarrow \boxed{|\beta| < 4\sqrt{5} \simeq 8.94}.$$