TEORIA DEI SISTEMI - Prof. C. Manes - Compito d'esame del 07-09-2026

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{(s-10)}{(s-0.5)(s+2)}$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode modulo e fase e il diagramma polare per $K = 1$;
2. Si calcolino i valori delle pulsazioni ω in cui il diagramma polare attraversa l'asse reale;
3. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (6 punti) Si considerino un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto, caratterizzati dalle stesse matrici A, B e C (con $D = 0$)

$$\text{T.C. } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \qquad \text{T.D. } \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \quad ? \quad \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Della matrice A sappiamo che è reale ed ha una coppia di autovalori complessi coniugati. Conosciamo l'autovalore λ_1 e il corrispondente autovettore destro r_1:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j), \quad r_1 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \end{bmatrix},$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali dei due sistemi;
2. Si calcolino le risposte impulsive dell'uscita dei due sistemi, $w_{TC}(t)$ e $w_{TD}(k)$, impostando il calcolo in modo da ridurre, per quanto possibile, il numero di conti;
3. Si calcoli la funzione di trasferimento $W_{TC}(s)$ del sistema a tempo continuo, sempre cercando di minimizzare i calcoli da effettuare;
4. Si discuta l'esistenza della risposta armonica per entrambi i sistemi T.C. e T.D.

Problema 3 (6 punti)

Sia dato un sistema a tempo continuo ad un ingresso e una uscita, caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = \frac{1}{2}\,e^{-t} - \frac{1}{2}\,e^{-9t}, \qquad t \geq 0.$$

1. Si calcoli la pulsazione ω^* alla quale la risposta armonica risulti sfasata di $\pi/2$ in ritardo rispetto alla fase della sinusoide in ingresso;
2. Si calcoli la risposta dell'uscita al gradino unitario;
3. Si verifichi che la derivata della risposta al gradino unitario coincide con la risposta impulsiva, e si dia una spiegazione di questa proprietà;

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^\top$;
4. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$;
5. Si calcolino le sequenze di ingresso $u_A(k)$ e $u_B(k)$ che portano lo stato da 0 in $\bar{x}_A$ e in $\bar{x}_B$, rispettivamente.

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - k\,x_1^3(t) - 1, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)\big(x_2(t)+1\big) + x_1(t). \end{cases}$$

1. Si individui l'unico punto di equilibrio che non dipende dal parametro k e se ne studi la stabilità per $k \in (-\infty, \infty)$ (sia con il metodo della approssimazione lineare che con una funzione di Lyapunov quadratica)
2. Si individuino gli altri punti di equilibrio del sistema (che dipendono da k)

Quesito 5b. Si dia la definizione di punto di equilibrio *Globalmente Asintoticamente Stabile* (GAS). Inoltre, basandosi sulla definizione, discutere se un sistema possa avere più di un punto di equilibrio di tipo GAS. Discutere anche se sia possibile per un sistema avere un punto di equilibrio instabile, oltre al punto di equilibrio GAS.

Nota: la somma dei punteggi degli esercizi fa 32 e non 30.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
