Compito di Teoria dei sistemi del 7 sett. 2029 – Prof. Manes

Bozza delle soluzioni

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

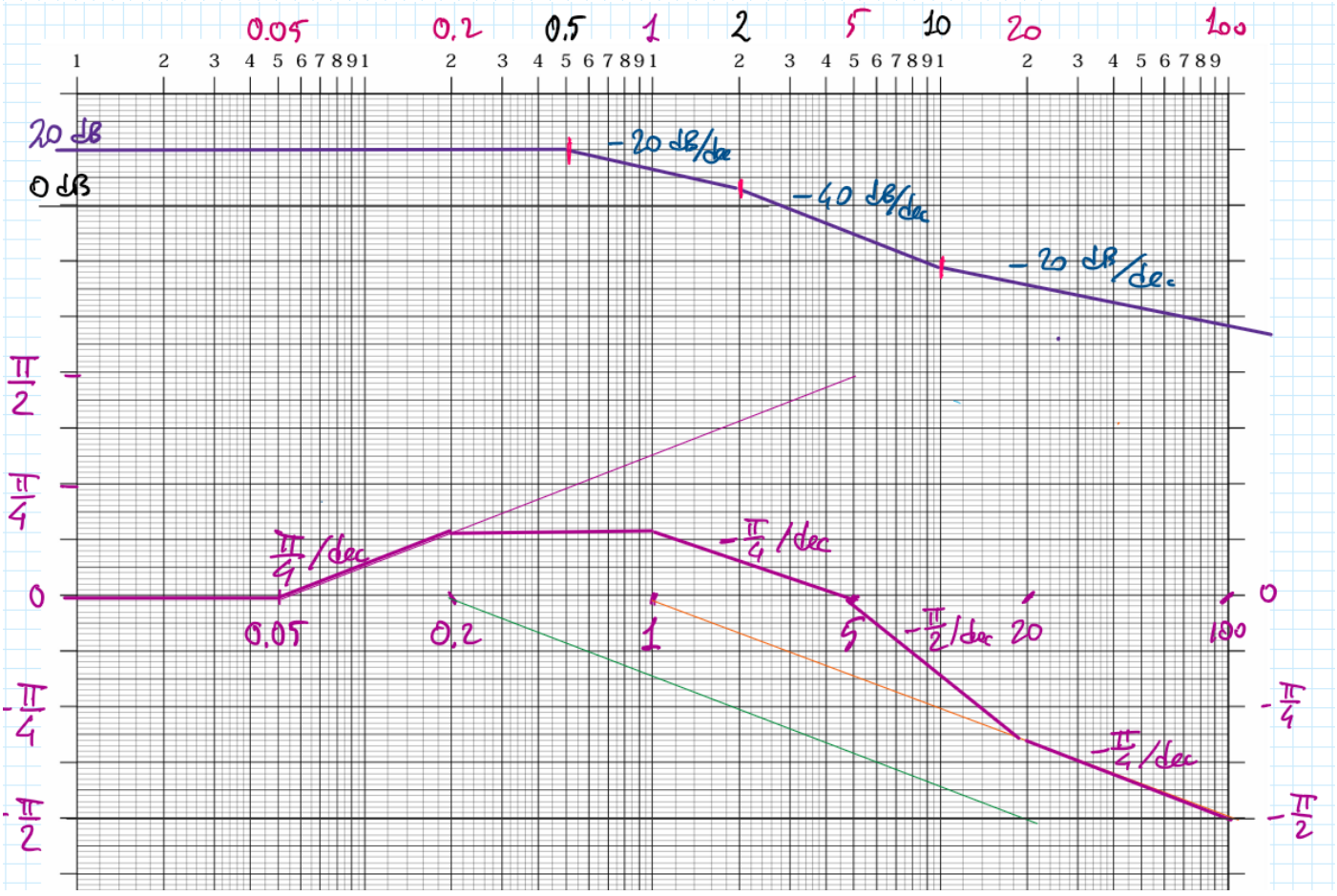
$$W(s) = K\frac{(s-10)}{(s-0.5)(s+2)}$$

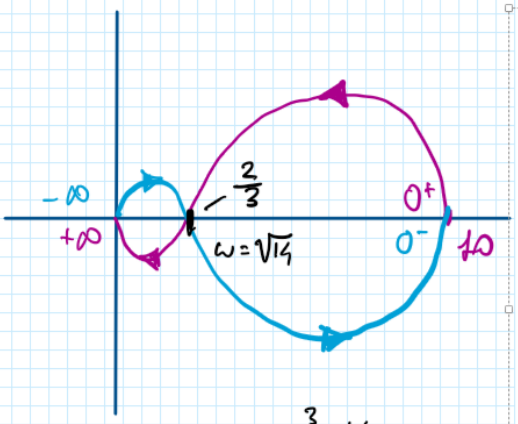
1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode modulo e fase e il diagramma polare per $K = 1$;
2. Si calcolino i valori delle pulsazioni ω in cui il diagramma polare attraversa l'asse reale;
3. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

$$W(s) = \frac{K(s-10)}{(s-0.5)(s+2)} = \frac{K(-10)\left(1-\frac{s}{10}\right)}{(-1)\cdot\left(1-\frac{s}{0.5}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)}$$

$$W(j\omega) = k\cdot\frac{10\left(1-j\frac{\omega}{10}\right)}{\left(1-j\frac{\omega}{0.5}\right)\left(1+j\frac{\omega}{2}\right)}$$

la fase parte da zero e asintoticamente arriva a $-\frac{\pi}{2}$





$$W(j\omega) = \frac{j\omega - 10}{(j\omega - 0.5)(j\omega + 2)} \tag{2}$$

Sviluppiamo il denominatore:

$$(j\omega - 0.5)(j\omega + 2) = j^2\omega^2 + j2\omega - j0.5\omega - 1 = -\omega^2 + j1.5\omega - 1 = -(\omega^2 + 1) + j1.5\omega \tag{3}$$

Ora l'espressione per $W(j\omega)$ è:

$$W(j\omega) = \frac{-10 + j\omega}{-(\omega^2 + 1) + j1.5\omega} \tag{4}$$

Per separare la parte reale dalla parte immaginaria, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore: $-(\omega^2 + 1) - j1.5\omega$.

$$W(j\omega) = \frac{(-10 + j\omega) \cdot (-(\omega^2 + 1) - j1.5\omega)}{(-(\omega^2 + 1) + j1.5\omega) \cdot (-(\omega^2 + 1) - j1.5\omega)} \tag{5}$$

Il denominatore diventa:

$$(-(\omega^2 + 1))^2 - (j1.5\omega)^2 = (\omega^2 + 1)^2 + 2.25\omega^2 \tag{6}$$

Che è un numero puramente reale e sempre positivo (per ω reale).
Calcoliamo il numeratore:

$$\begin{aligned}(-10 + j\omega) \cdot (-(\omega^2 + 1) - j1.5\omega) &= 10(\omega^2 + 1) + j15\omega - j\omega(\omega^2 + 1) - j^2 1.5\omega^2 \\ &= 10\omega^2 + 10 + j15\omega - j\omega^3 - j\omega + 1.5\omega^2 \\ &= (11.5\omega^2 + 10) + j(-\omega^3 + 14\omega)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Im}(W(j\omega)) = \frac{-\omega^3 + 14\omega}{(1+\omega^2)^2 + 2.25\omega^2}$$

$\mathrm{Im}(W(j\omega)) = 0$ per $\omega = 0$

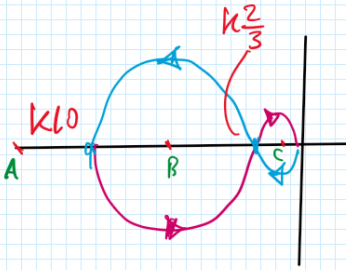
$$W(j\sqrt{14}) = \frac{11.5(14) + 10}{(14+1)^2 + 2.25(14)} = \frac{23 \cdot 7 + 10}{15^2 + \frac{9}{4} \cdot 14} = \frac{171}{(3 \cdot 5)^2 + 3^2 \cdot \frac{7}{2}} = \frac{3^2 \cdot 19}{3^2\left(25 + \frac{7}{2}\right)}$$

$\frac{23}{2}$ $\quad \frac{9}{4}$

$$W(j\sqrt{14}) = \frac{19}{\frac{57}{2}} = \frac{2}{3}$$

NOTA $M_{AP}^{+} = 1$ (polo in $s = 0.5$)

$k > 0 \Rightarrow N = 0 \quad M_{CH}^{+} = 1 - 0 = 1$



Ⓐ $-1 < 10k \Leftrightarrow k \in \left(-\frac{1}{10}, 0\right)$

$k < 0 \qquad N = 0 \qquad M_{CH}^{+} = 1$

Ⓑ $10k < -1 < \frac{2}{3}k \Rightarrow k \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{10}\right)$

$N = 1 \qquad M_{CH}^{+} = 1 - 1 = 0$

Ⓒ $\frac{2}{3}k < -1 \Rightarrow k \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

$N = -1 \qquad M_{CH}^{+} = 1 - (-1) = 2$

Routh

$$(s - \tfrac{1}{2})(s+2) + k(s-10) = s^2 + \tfrac{3}{2}s + 1 + ks - 10k$$

$$s^2 + \left(k + \tfrac{3}{2}\right)s + 1 - 10k$$

		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{10}$		0	
1	+		+		+		+
$k+\frac{3}{2}$	−		+		+		+
$1-10k$	+		+		−		−
VAR	2		0		1		

$k \in \left(-\frac{1}{10}, +\infty\right) \quad M_{CH}^{+} = 1$

$k \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{10}\right) \quad M_{CH}^{+} = 0$

$k \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \quad M_{CH}^{+} = 2$

Problema 2. (6 punti) Si considerino un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto, caratterizzati dalle stesse matrici A, B e C (con $D = 0$)

$$\text{T.C.} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad \text{T.D.} \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} \; ? \; \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Della matrice A sappiamo che è reale ed ha una coppia di autovalori complessi coniugati. Conosciamo l'autovalore λ_1 e il corrispondente autovettore destro r_1:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j), \quad r_1 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \end{bmatrix},$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali dei due sistemi;
2. Si calcolino le risposte impulsive dell'uscita dei due sistemi, $w_{TC}(t)$ e $w_{TD}(k)$, impostando il calcolo in modo da ridurre, per quanto possibile, il numero di calcoli;
3. Si calcoli la funzione di trasferimento $W_{TC}(s)$ del sistema a tempo continuo (sempre cercando di minimizzare i calcoli da effettuare);
4. Si discuta l'esistenza della risposta armonica per entrambi i sistemi.

$r_1 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad R = \begin{bmatrix} 1+j & 1-j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad |R| = (1+j)-(1-j) = 2j$

$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$ $\quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1+j \\ -1 & 1+j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2j} = \begin{bmatrix} -j & 1+j \\ j & 1-j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$

$|\lambda_1| = 1, \quad \langle \lambda_1 = \frac{\pi}{4}$

$\lambda_1^k = \cos\frac{\pi}{4}k + j \sin\frac{\pi}{4}k$, $\quad e^{\lambda_1 t} = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cdot e^{j\frac{t}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + j \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$C = [2 \; 0] \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$w(t) = e^{\lambda_1 t} C r_1 \cdot e_1^T B + e^{\lambda_1^* t} C r_1^* \cdot e_1^{*T} B = 2\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t} C r_1 e_1^T B\right)$

$Cr_2 = [2 \; 0] \cdot \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (1+j) \neq 0$ modo osservabile $\left(Cr_2 = (Cr_1)^* \neq 0\right)$

$e_1^T B = \frac{1}{2}[-j \;\; 1+j] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$ modo eccitabile $\left(e_2^T B = (e_1^T B)^* \neq 0\right)$

$w(t) = 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cdot e^{j\frac{1}{\sqrt{2}}t} \cdot 2(1+j) \cdot \frac{1}{2}\right)$ T.C.

$w(t) = 2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \mathrm{Re}\left(\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t + j \sin\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)(1+j)\right)$

$w(t) = 2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t - \sin\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$

$w(k) = 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)\right)^{k-1} \cdot 2(1+j)\frac{1}{2}\right)$ / $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = e^{j\frac{\pi}{4}}$

$w(k) = 2\mathrm{Re}\left(\left(\cos\frac{\pi}{4}(k-1) + j \sin\frac{\pi}{4}(k-1)\right)(1+j)\right)$ T.D.

$w(k) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}(k-1) - \sin\frac{\pi}{4}(k-1)\right)$

$W(s) = \mathcal{L}(w(t))$ Ricorda $\mathcal{L}\left(e^{\alpha t} f(t)\right) = F(s-\alpha)$ $\quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathcal{L}(e^{\alpha t}\cos\omega t) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$ / $\quad \mathcal{L}(e^{\alpha t}\sin\omega t) = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

$W(s) = \mathcal{L}\left(2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t - \sin\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\right) = \frac{2(s-\frac{1}{\sqrt{2}})}{(s-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} - \frac{2\frac{1}{\sqrt{2}}}{(s-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}$

$$W(s) = \frac{2(s-\sqrt{2})}{s^2 - s\sqrt{2} + 1}$$

STABILITÀ: T.C. $\mathrm{Re}(\lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, MODO INSTABILE

T.D. $|\lambda_i| = 1$, modo semplicemente stabile

In entrambi i casi NON esiste la risposta armonica

Problema 3 (6 punti)

Sia dato un sistema a tempo continuo ad un ingresso e una uscita, caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = \frac{1}{2}\, e^{-t} - \frac{1}{2}\, e^{-9t}, \qquad t \geq 0.$$

1. Si calcoli la pulsazione ω^* alla quale la risposta armonica risulti sfasata di $\pi/2$ in ritardo rispetto alla fase della sinusoide in ingresso;
2. Si calcoli la risposta dell'uscita al gradino unitario;
3. Si verifichi che la derivata della risposta al gradino unitario coincide con la risposta impulsiva, e si dia una spiegazione di questa proprietà;

$$W(s) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+9-s-1}{(s+1)(s+9)}\right) = \frac{4}{(s+1)(s+9)}$$

$W(j\omega) = Re(\omega) + j\,Im(\omega)$ $\quad \omega^*$: $Re(\omega^*) = 0$ e $Im(\omega^*) < 0$

$$W(j\omega) = \frac{4}{s^2+10s+9}\Big|_{j\omega} = \frac{4}{9-\omega^2+j10\omega} \Rightarrow \omega^*: \langle 9-\omega^2+j10\omega^* \rangle = \frac{\pi}{2}$$

$\omega^* = \pm 3$ $\quad W(j3) = \dfrac{4}{j30} = -j\dfrac{4}{30}$ $\quad \langle -j \rangle = -\dfrac{\pi}{2}$

$\omega^* = 3$ rad/sec

$$Y(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{4}{s(s+1)(s+9)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+9} + \frac{R_4}{s}$$

$$R_1 = \frac{4}{s(s+9)}\Big|_{s=-1} = \frac{4}{(-1)8} = -\frac{1}{2}, \qquad R_2 = \frac{4}{s(s+1)}\Big|_{s=-9} = \frac{4}{-9\cdot -8} = \frac{1}{18}$$

$$R_4 = \frac{4}{(s+1)(s+9)}\Big|_{s=0} = \frac{4}{9} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{18}e^{-9t} + \frac{4}{9}, \quad t \geq 0$$

$$w = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{9}{18}e^{-9t} = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-9t}\right), \text{ ok}$$

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^\top$;
4. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$;
5. Si calcolino le sequenze di ingresso $u_A(k)$ e $u_B(k)$ che portano lo stato da 0 in $\bar{x}_A$ e in $\bar{x}_B$, rispettivamente.

$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B$

$\mathcal{R} = \text{span}(B, AB, A^3B) \Rightarrow \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rho(P_4) = 3$

$Q_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad 1 \;\; 1 \;\; 1$

$\rho(Q_{\mathcal{N}}) = 2$

$\mathcal{N} = \mathcal{N}(Q) = \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{N} \Rightarrow \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{N} \Rightarrow \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathcal{X}_4 = \emptyset$

$X_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = B + 2 \cdot AB$ $\quad \begin{cases} u(0) = 2 \\ u(1) = 1 \end{cases}$

$X(2) = Bu(1) + ABu(0)$

$X_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B + AB - A^2B$ $\quad \begin{cases} u(0) = -1 \\ u(1) = 1 \\ u(2) = 1 \end{cases}$

$X(3) = Bu(2) + ABu(1) + A^2Bu(0)$

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - k\,x_1^3(t) - 1, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)\big(x_2(t) - 1\big) + x_1(t). \end{cases}$$

1. Si individui l'unico punto di equilibrio che non dipende dal valore del parametro k e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ (sia con il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio che con il secondo metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica)
2. Si individuino gli altri punti di equilibrio del sistema (che dipendono da k)

Quesito 5b. Si dia la definizione di punto di equilibrio *Globalmente Asintoticamente Stabile* (GAS). Inoltre, basandosi sulla definizione, discutere se un sistema possa avere più di un punto di equilibrio di tipo GAS. Discutere anche se sia possibile per un sistema avere un punto di equilibrio instabile, oltre al punto di equilibrio GAS.

$$f(x,k) = \begin{bmatrix} -x_2 - kx_1^3 - 1 \\ -x_1^2(x_2+1) + x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2+1) - kx_1^3 \\ x_1\big(1 - x_1(x_2+1)\big) \end{bmatrix}$$

Unico punto di equilibrio che NON dipende da k

$x_e = (0,-1)$

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} -3kx_1^2 & -1 \\ -2x_1(x_2+1)+1 & -x_1^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = \pm j$ NON si conclude nulla

eccetto per $k=0$, in quanto è un sistema lineare

Per $k=0$ x_e S.S.

Cambio di coordinate $\xi_2 = x_2 + 1$, $\xi_1 = 0$ $\quad \xi_e = (0,0)$

$\dot{\xi}_1 = -\xi_2 - k\xi_1^3$ $\quad$ Lyapunov $V(\xi) = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{\alpha}{2}\xi_2^2$ $\quad \alpha > 0$

$\dot{\xi}_2 = -\xi_1^2\xi_2 + \xi_1$

$$\dot{V}(\xi) = \xi_1\left(-\xi_2 - k\xi_1^3\right) + \alpha\xi_2\left(-\xi_1^2\xi_2 + \xi_1\right) = -\xi_1\xi_2 - k\xi_1^4 - \alpha\xi_1^2\xi_2^2 + \alpha\xi_1\xi_2$$

per $\alpha = 1 \Rightarrow \dot{V}(\xi) = -k\xi_1^4 - \xi_1^2\xi_2^2 \leq 0$

per $k \geq 0$ semi def Negative $\Rightarrow$ x_e S.S.

per $k < 0$ NON si conclude Nulla

→ Altri punti di equilibrio $f(x,k) = \begin{bmatrix} -(x_2+1) - kx_1^3 \\ x_1\big(1 - x_1(x_2+1)\big) \end{bmatrix}$

2° $x_1\big(1 - x_1(x_2+1)\big) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\not\Rightarrow x_1(x_2+1) = 1$

1° $kx_1^3 = -(x_2+1)$; $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

per $x_2 \neq -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2+1} \Rightarrow \frac{k}{(x_2+1)^3} = -(x_2+1) \Rightarrow (x_2+1)^4 = -k$

per $k<0 \Rightarrow x_2 + 1 = \pm|k|^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x_2 = -1 \pm |k|^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2+1} = \pm\frac{1}{|k|^{\frac{1}{4}}}$

Quindi: per $k \geq 0$, unico punto di equilibrio $x_e = (0,-1)$

per $k<0$, $x_e = \left(\frac{1}{|k|^{\frac{1}{4}}}, -1 + |k|^{\frac{1}{4}}\right)$

$x_e = \left(-\frac{1}{|k|^{\frac{1}{4}}}, -1 - |k|^{\frac{1}{4}}\right)$

Quesito 5b)
Risposte accettabili:
Un punto di equilibrio di un sistema è Globalmente Asintoticamente Stabile (GAS):
- se è asintoticamente stabile e con una regione di convergenza che è tutto lo spazio di stato $\mathbb{R}^n$;
- se è stabile, secondo la definizione di Lyapunov, con la proprietà aggiuntiva che tutte le traiettorie, a partire da qualunque stato iniziale, convergono asintoticamente al punto di equilibrio.

Dalla seconda formulazione è evidente che se un sistema ha un punto di equilibrio GAS allora non può avere altri punti di equilibrio. Infatti, la presenza di un secondo punto di equilibrio (stabile o instabile che sia) contraddirebbe la proprietà che tutte le traiettorie convergono asintoticamente al punto GAS in quanto, per definizione, se lo stato iniziale del sistema è un punto di equilibrio, tutta la traiettoria che ne consegue coincide con il punto di equilibrio – traiettoria degenere.
Quindi, un sistema che ha un punto di equilibrio GAS, non può avere altri punti di equilibrio, né GAS, né instabili.