

## DIAGRAMMI DI BODE

Per calcolare la risposta a regime di un ingresso sinusoidale occorre esaminare la funzione di trasferimento  $W(i\omega)$  in MODULO e FASE.

Una funzione  $W(s)$ , con  $s = i\omega$ , può sempre essere espressa in forma canonica:

$$W(s) = K s^{\pm q} \frac{(1 \pm s\tau)^z \dots \left(1 \pm \frac{z\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}{(1 \pm s\bar{\tau})^{\bar{z}} \dots \left(1 \pm \frac{\bar{z}\bar{\xi}}{\bar{\omega}_n} s + \frac{s^2}{\bar{\omega}_n^2}\right)}$$

ovvero, in modo univoco, come rapporto delle potenze dei seguenti fattori:

- 1) termini monomi "s" (zeri e poli nell'origine).
- 2) termini binomi " $1 + \tau s$ ",  $\tau \in \mathbb{R}$  (zeri e poli reali);  $\omega_c = \frac{1}{|\tau|}$  è detta pulsazione di taglio del termine binomio.
- 3) termini trinomi " $1 + \frac{z\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ ",  $|\xi| < 1$ ,  $\omega_n > 0$ ;

(coppie di zeri e poli complessi e coniugati);  $\xi$  e  $\omega_n$  sono rispettivamente lo smorzamento e la pulsazione di risonanza del termine trinomio.

- 4) guadagno di Bode "K".

Vediamo allora come si ottengono i termini binomi e trinomi della forma canonica:

- Termine binomio:

$$\bullet s_i < 0 \Rightarrow (s - s_i) = -(s_i - s) = -s_i \left(1 - \frac{s}{s_i}\right) = -s_i \left(1 + \frac{s}{|s_i|}\right) = -s_i (1 + s\tau)$$

$$\text{con } \tau = \frac{1}{|s_i|}$$

$$\bullet s_i > 0 \Rightarrow (s - s_i) = -(s_i - s) = -s_i \left(1 - \frac{s}{s_i}\right) = \left(1 - \frac{s}{|s_i|}\right) (-s_i) = -s_i (1 - s\bar{\tau})$$

$$\text{con } \bar{\tau} = \frac{1}{|s_i|}$$

$\tau$  è dunque una costante di tempo.

- termine trinomico:

$$(s - s_i)(s - s_i^*) \text{ con } s_i = d + i\beta \text{ e } s_i^* = d - i\beta \Rightarrow$$

$$(s - d - i\beta)(s - d + i\beta) = s^2 - sd + i\cancel{\beta} - sd + d^2 - i\cancel{\beta} - i\cancel{\beta} + i\cancel{\beta} + \beta^2 = \\ = s^2 - 2sd + d^2 + \beta^2 = (s - d)^2 + \beta^2; \text{ facendo un passo indietro e} \\ \text{dividendo tutto per } (d^2 + \beta^2) \neq 0 \text{ ottengo:}$$

$$1 + \frac{s^2}{(d^2 + \beta^2)} - \frac{2d s}{(d^2 + \beta^2)} \Rightarrow \text{per } \omega_m = \sqrt{d^2 + \beta^2} \text{ e } \xi = \frac{|d|}{\sqrt{d^2 + \beta^2}} \Rightarrow$$

Posso avere 3 casi distinguibili dal valore di  $d$ :

\*  $d < 0$

$$\omega_m^2 \left( 1 + \frac{2\xi s}{\omega_m} + \frac{s^2}{\omega_m^2} \right) \rightarrow \text{se } \alpha < 0 \Rightarrow \xi = \frac{|d|}{\sqrt{d^2 + \beta^2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \rightarrow \text{per } \alpha < 0 \Rightarrow \xi \rightarrow -\xi \Rightarrow \left( 1 \oplus \frac{2\xi s}{\omega_m} + \frac{s^2}{\omega_m^2} \right)$$

\*  $d > 0$

$$\omega_m^2 \left( 1 - \frac{2\xi s}{\omega_m} + \frac{s^2}{\omega_m^2} \right)$$

\*  $d = 0$

$$\omega_m^2 \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_m^2} \right)$$

I diagrammi di Bode sono le rappresentazioni in scala semilogaritmica del modulo (espresso linearmente in dB) e della fase della funzione di trasferimento calcolata in  $s = i\omega$  al variare della pulsazione  $\omega \in (0, +\infty)$

Per semplificare le cose, Bode utilizzò le virtù dei Logaritmi così da rappresentare i diagrammi come somma algebrica dei contributi dei singoli fattori canonici fin ora descritti: i contributi dei termini al numeratore si sommano, quelli dei termini al denominatore si sottraggono ed eventuali potenze moltiplicano per un fattore "p" i contributi del termine.

Possiamo ora esaminare i contributi in modulo e fase dei singoli termini:

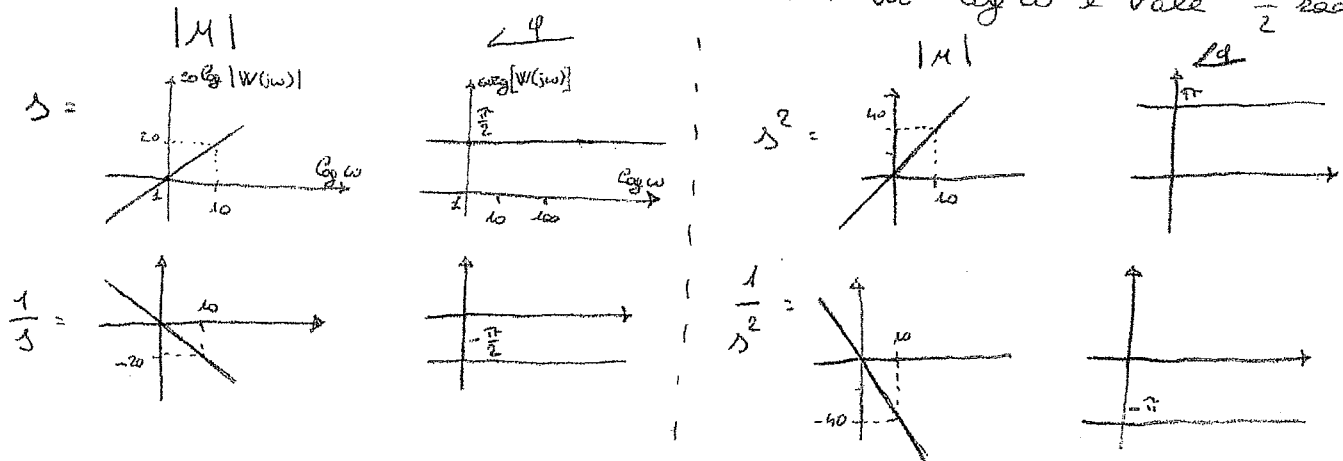
1) termine monomio: nota. modulo espresso in dB di  $F(s\omega)$ :

$$s = j\omega \Rightarrow |j\omega|_{dB} = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \quad \angle j\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$= |F(s\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(F(s\omega))$$

Il diagramma di Bode delle ampiezze è una retta con pendenza 20 dB/dec che taglia i 0 dB in corrispondenza della pulsazione di 1 rad/sec.

La fase è, invece, costante al variare di  $\log \omega$  e vale  $\frac{\pi}{2}$  rad.



2) termine binomio

$$1 + \tau s = 1 + j\omega\tau \Rightarrow 20 \log |1 + j\omega\tau| = 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \quad \angle 1 + \tau j\omega = \arctan(j\omega\tau)$$

A differenza dei monomi, i diagrammi di Bode dei binomi non hanno un andamento lineare rispetto a  $\log \omega$ . Per la loro rappresentazione si sceglie di esaminare il comportamento asintotico della funzione  $W(j\omega)$  nei punti di non derivabilità, detti punti di rottura.

Dall'analisi alle basse frequenze, per pulsazioni inferiori a quella di taglio ( $\omega \ll \omega_c$ ):

$$1 + \tau^2 \omega^2 \approx 1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0$$

Dall'analisi alle alte frequenze, per pulsazioni superiori a quella di taglio ( $\omega \gg \omega_c$ ):

$$1 + \tau^2 \omega^2 \approx \tau^2 \omega^2 \Rightarrow 20 \log |\tau \omega| = 20 (\log \omega - \log \omega_c) \quad \textcircled{2}$$

Ciò si approssima con una retta di pendenza 20 dB/dec passante

in  $(0, \omega_c)$ .

Lo scostamento del vero diagramma di Bode da quello a linee spezzate (asintotico) si ha per  $\omega = \omega_c$ :

$$20 \log \sqrt{1+z^2\omega_c^2} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3,01 \text{ dB.}$$

Anche per la fase si esegue uno studio basato sui punti di non derivabilità:

Alle basse frequenze il termine binomio può confondersi con la sua parte reale, per cui la fase assume un andamento costante pari a 0.

Alle alte frequenze il termine binomio può confondersi con la sua parte immaginaria, per cui la fase assume un andamento pari a  $\pm \frac{\pi}{2}$  a seconda che "z" sia maggiore o minore di 0.

Si nota che non esistono punti di intersezione, ma essendo la fase una funzione dispari si sa che dovrà avere un andamento simmetrico rispetto al punto  $(\omega_c, \frac{\pi}{4})$ .

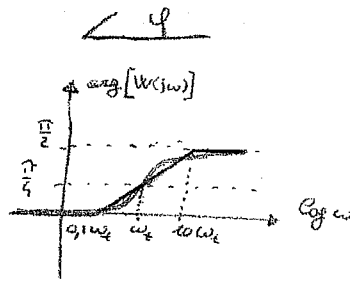
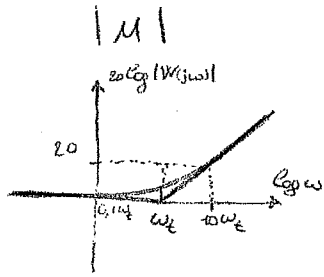
Si traccia allora un segmento che intercetti entrambe i tratti costanti che abbia una pendenza di  $\frac{\pi}{4}$  rad per decade.

Lo scostamento della fase dal diagramma asintotico si ha per i punti di rottura della spezzata:  $0,1\omega_c$  e  $10\omega_c$ .

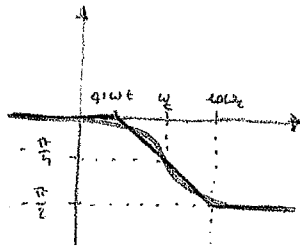
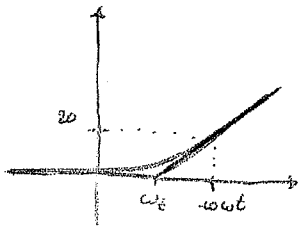
$$\left. \begin{aligned} \arctg(z \cdot 0,1\omega_c) &= \arctg(0,1) = 0,1 \text{ rad.} \\ \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(z \cdot 10\omega_c)\right) &= \frac{\pi}{2} - \arctg(10) = 0,1 \text{ rad.} \end{aligned} \right\} \text{ uguali proprio per la simmetria della curva.}$$

3 diagrammi che ne seguano sono:

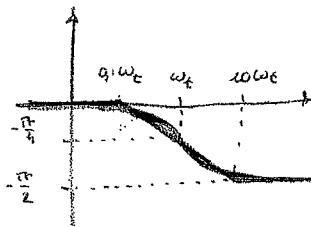
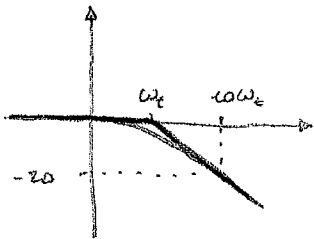
$1 + \tau s$  con  $\tau > 0$



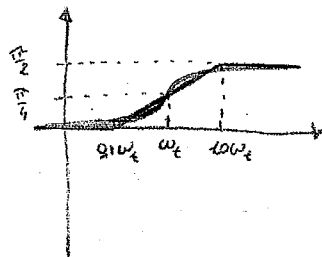
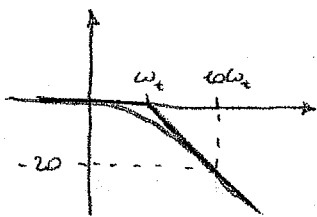
$1 + \tau s$  con  $\tau < 0$



$\frac{1}{1 + \tau s}$  con  $\tau > 0$



$\frac{1}{1 + \tau s}$  con  $\tau < 0$



3) termine trinomio:

$$1 + \frac{2\xi\omega}{\omega_m} + \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \quad \text{con } |\xi| \leq 1; \omega_m > 0 \Rightarrow \text{per } s = j\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| 1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right|_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_m^2}}$$

$$\angle \left( 1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right) = \arctan \left( \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_m}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}} \right)$$

Anche per il termine trinomio è necessaria l'analisi asintotica per poter approssimare i diagrammi con opportune spezzate lineari a tratti.

Alle basse frequenze ( $\omega \ll \omega_m$ ):

$$1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \approx 1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0$$

Alle alte frequenze ( $\omega \gg \omega_m$ ):

$$1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \approx -\frac{\omega^2}{\omega_m^2} \Rightarrow \left| 1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right|_{dB} = 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_m} \right)^2$$

Il diagramma dei moduli si approssima alle alte frequenze con una retta di pendenza 40 dB/dec.

Lo scostamento per  $\omega = \omega_m$  è pari a:

$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega_m^2}{\omega_m^2}} = 20 \log |2\xi|$$

Si evince da ciò che per la definizione di  $|\xi| \leq 1$  possono allora esistere 4 casi differenti:

1)  $|\xi| = 1 \Rightarrow 20 \log 2 \approx 6,02 \text{ dB}$

2)  $|\xi| = \frac{1}{2} \Rightarrow 20 \log \frac{1}{2} = 0$  scostamento nullo

3)  $|\xi| = 0,1 \Rightarrow$  si ha un picco in  $\omega_m$ , se il termine è al numeratore il picco sarà verso il basso, attenuazione delle ampiezze. Se è al denominatore si avrà amplificazione

4)  $|\xi| = 0 \Rightarrow$  c'è un asintoto verticale in  $\omega_m$ . Come prima, se il termine è al numeratore si avrà attenuazione infinita altrimenti amplificazione infinita in  $\omega_m$ .

Anche per quanto riguarda il diagramma della fase si effettua uno studio sul comportamento asintotico:

- alle basse frequenze ( $\omega \ll \omega_m$ ) il termine trinomio si confonde con la sua parte reale, per cui la fase ha un andamento pari a 0;
- alle alte frequenze ( $\omega \gg \omega_m$ ) il trinomio si confonde con  $-\frac{\omega^2}{\omega_m^2} < 0$ , per cui la fase ha un andamento costante e pari a  $\pi$  (si assume positivo perché, per  $\omega$  che passa da 0 a  $+\infty$ , il trinomio è un vettore del piano complesso che ruota in senso antiorario).

Analogamente al binomio non esistono intersezioni tra i due stati e come fatto in precedenza si può sfruttare la simmetria della fase intersecando entrambi gli stati con una retta passante per il punto  $(\omega_m, \frac{\pi}{2})$  e pendenza  $\frac{\pi}{2} \text{ rad/dec}$ .

Questa tecnica è tanto più efficace quanto più il termine trinomio si approssima con il quadrato di un binomio.

Se si suppone che il termine trinomio sia effettivamente il quadrato di un binomio, ossia  $|\xi| = 1$ , utilizzando il

diagramma asintotico definito su una doppia decade, il massimo scostamento si ha nei punti di rottura  $0,1\omega_m$  e  $10\omega_m$  ed è:

$$\angle \left( 1 + \frac{2j \cdot 0,1\omega_m}{\omega_m} - \frac{0,01\omega_m^2}{\omega_m^2} \right) = \angle \left( \frac{88}{100} + 2j \frac{1}{10} \right) = \arctan \left( \frac{20}{88} \right) \approx 0,2 \text{ rad}$$

Si desidera, ora, impostare i punti di rottura simmetricamente a  $\omega_m$  mantenendo lo scostamento pari a quello appena trovato. Utilizzo allora il generico intervallo  $\left[ \frac{\omega_m}{d}, d\omega_m \right]$ :

$$\angle \left( 1 + \frac{2j\zeta\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right) = \arctan \left( \frac{20}{88} \right) \Rightarrow \text{per } \omega = \frac{\omega_m}{d} \Rightarrow$$

$$\angle \left( 1 - \frac{1}{d^2} + j \frac{2\zeta}{d} \right) = \arctan \left( \frac{20}{88} \right) \Rightarrow \frac{\frac{2\zeta}{d}}{1 - \frac{1}{d^2}} = \frac{20}{88} \Rightarrow$$

$$\frac{2\zeta d}{d^2 - 1} = \left( \frac{20}{88} \right) \cdot \left( \frac{1}{5} \right) \Rightarrow d^2 - 10\zeta d - 1 = 0 \Rightarrow d = 5\zeta + \sqrt{25\zeta^2 + 1}$$

La pendenza di tale diagramma asintotico sarà uguale

a:

$$\frac{\pi}{\log(d\omega_m) - \log\left(\frac{\omega_m}{d}\right)} = \frac{\pi}{2 \log d} = \frac{\pi}{2 \log(d(5))}$$

3 diagrammi di Bode in modulo e fase, tutti i casi possibili, saranno allora i seguenti:

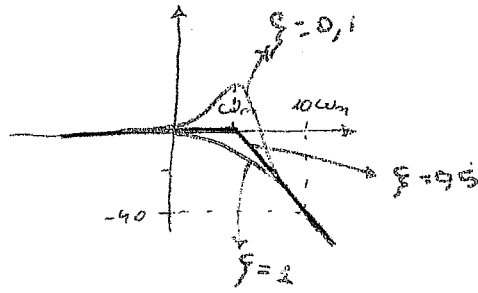


$$\frac{1}{1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}}$$

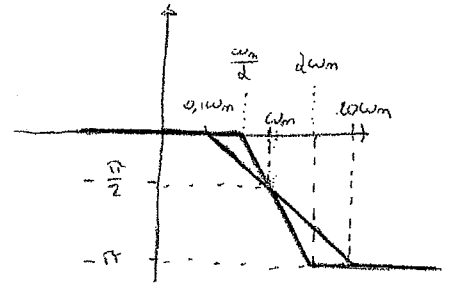
$$\xi \in (0, 1]$$

$$\xi \neq 0$$

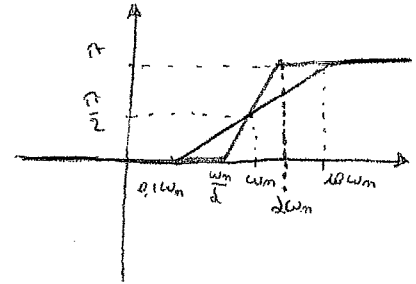
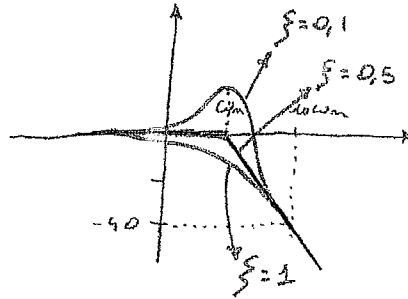
$|M|$



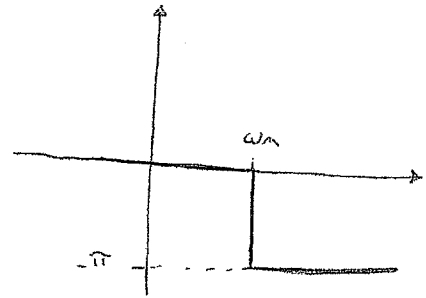
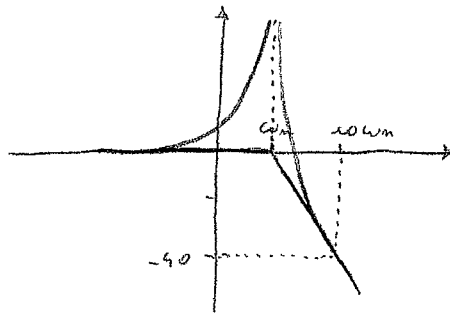
$\angle \varphi$



$$\xi \in [-1, 0)$$



$$\xi = 0$$

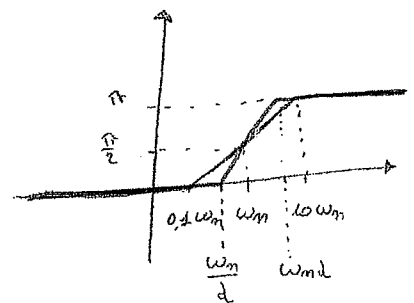
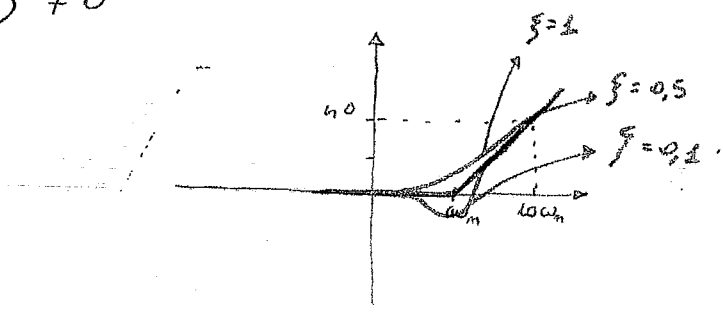


$$1 + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}$$

$\xi \in (0, 1]$   
 $\xi \neq 0$

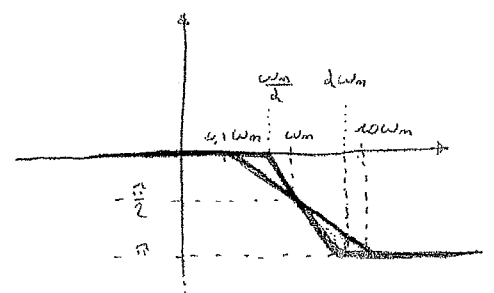
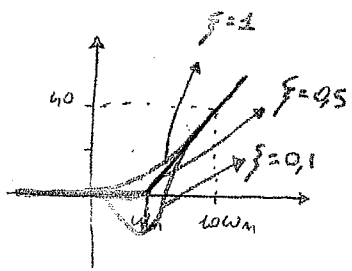
$|M|$

$\angle \varphi$



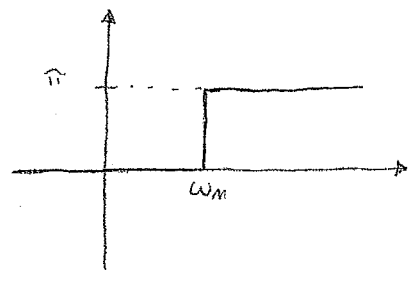
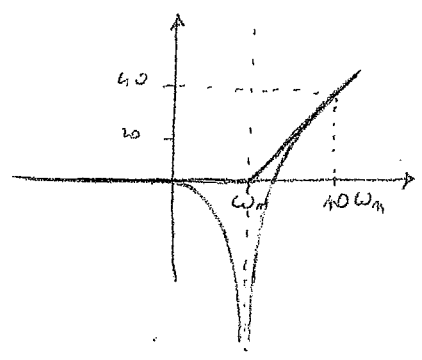
essendo  $d = 5\xi + \sqrt{25\xi^2 + 1}$   
 i casi del valore di  $\xi$  mi porteranno  
 al variare dell'intervallo  
 $[\frac{\omega_m}{d}, d\omega_m]$  aumentando o  
 diminuendo la pendenza.

$\xi \in [-1, 0)$



$\xi \Rightarrow$  agisce come spiegato con

$\xi = 0$



#### 4) GUADAGNO DI BODE

K

Produce nelle ampiezze un'amplificazione uniforme al variare di  $\omega$ , ciò si riflette nei diagrammi del modulo con una traslazione del grafico di una quantità pari a  $20 \log |K|$

Per quel che riguarda la fase, il guadagno di Bode non dà alcun contributo se è positivo:  $\angle K = 0$  per  $K > 0$ ; Nel caso di  $K < 0$  sfasa uniformemente il grafico di  $\pi$  rad.

# SCHEMA RIASSUNTIVO DIAGRAMMI DI BODE

	MODULO NUMERATORE	MODULO DEN.	FASE NUM.	FASE DEN.
$K$	<p><math>20 \log  K </math></p>	<p><math>\frac{1}{K} = K^{\pm}</math> comunque una costante maggiore di 0 secondabile a <math>K^{\pm}</math></p>	<p>0 per <math>K &gt; 0</math></p> <p><math>\pi</math> per <math>K &lt; 0</math></p>	
$s$	<p><math>20 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>-20 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>\pi/2</math></p>	<p><math>-\pi/2</math></p>
$1 + sT$	<p><math>20 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>-20 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>\pi/2</math> per dec</p>	<p><math>-\pi/2</math> per dec</p>
$1 - sT$			<p><math>\pi/4</math></p>	<p><math>\pi/4</math></p>
$1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$	<p><math>\xi = 1</math> <math>\xi = 0.5</math> <math>\xi = 0.1</math> <math>40 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>-40 \text{ dB/dec}</math> <math>\xi = 0.1</math> <math>\xi = 0.5</math> <math>\xi = 1</math></p>	<p>migliore approssim.</p> <p><math>\pi/2</math></p> <p><math>\omega_n/2</math> <math>\omega_n</math> <math>2\omega_n</math></p>	<p><math>\omega_n/2</math> <math>\omega_n</math> <math>2\omega_n</math></p> <p><math>\pi</math></p>
$1 - \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$	<p><math>40 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>-40 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>\pi/2</math> <math>\pi</math></p> <p><math>\omega_n/2</math> <math>\omega_n</math> <math>2\omega_n</math></p>	<p><math>\pi</math></p> <p><math>\omega_n/2</math> <math>\omega_n</math> <math>2\omega_n</math></p>
$1 + \frac{s^2}{\omega_m^2}$ $\xi = 0$	<p><math>40 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>-40 \text{ dB/dec}</math></p>	<p><math>\pi</math></p> <p><math>\omega_m</math></p>	<p><math>-\pi</math></p> <p><math>\omega_m</math></p>