MARIA ACETO

EVOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

1) SISTEMI A TEMPO CONTINUO E ANALISI NEL TEMPO

Sono descritti dalle seguente relazione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \end{cases} \qquad t \geq t_0 \quad t, t_0 \in \mathbb{R} \qquad (1.1)$$

dove

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ STATO DEL SISTEMA
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ INGRESSI
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ USCITE

} vettori

Le soluzioni del sistema possono esprimersi come somma dei contributi di EVOLUZIONE LIBERA e FORZATA cioè:

$$x(t) = x_{lib}(t) + x_{for}(t)$$

$$y(t) = y_{lib}(t) + y_{for}(t) \qquad (1.2)$$

con:

$$\begin{cases} x_{lib}(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \\ x_{for}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \end{cases} \qquad (1.3a)$$

e

$$\begin{cases} y_{lib}(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 \\ y_{for}(t) = \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t) \end{cases} \qquad (1.3b)$$

ma $y_{for}(t)$ si può scrivere come integrale di convoluzione dell'ingresso con la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $W(t)$

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

e quindi

$$y_{for}(t) = \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \qquad (1.4)$$

Dove $\delta(t)$ è la DELTA DI DIRAC e gode della proprietà

$$\int_a^b f(\tau)\delta(\tau-t)\,d\tau = \begin{cases} f(t) & \forall t \in [a,b] \\ 0 & \forall t \notin [a,b] \end{cases} \qquad (1.5)$$

La funzione di trasferimento $W(t)$ è detta RISPOSTA IMPULSIVA del sistema, in quanto le sue colonne coincidono con la risposta forzata dall'ingresso impulsivo $u(t) = e_i \delta(t)$, con e_i elemento i-esimo della base naturale di $\mathbb{R}^r$. rivedere il perché

Il calcolo della risposta del sistema passa attraverso la costruzione dell'esponenziale di matrice, definita come:

$$\boxed{e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}} \qquad (1.6)$$

per realizzarla si usa la DECOMPOSIZIONE SPETTRALE della matrice A:

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i v_i^T} \qquad (1.7)$$

dove $\quad v_i^T u_j = \delta_{ij} \qquad i,j = 1, \dots, n,$

con λ_i autovalori, u_i autovettori destri e v_i^T autovettori sinistri di A.

Utilizzando la decomposizione spettrale, le potenze di A si ottengono con la seguente formula

$$A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u_i v_i^T \qquad (1.8)$$

che sostituita alla definizione di esponenziale di matrice

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^k t^k}{k!} u_i v_i^T = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k t^k}{k!} \right) u_i v_i^T = \boxed{\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T} \qquad (1.9)$$

Sviluppando lo stato iniziale lungo le coordinate individuate dalla base degli autovettori destri:

$$\boxed{x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j} \qquad (1.10)$$

dove $\quad \boxed{\alpha_j = v_j^T x_0}$

l'evoluzione libera dello stato si decompone nella somma dei seguenti n MODI NATURALI

$$x_{\ell ib}(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i v_i^T u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i \quad (1.11)$$

Ogni MODO NATURALE è legato ad un autovalore. A seconda degli autovalori, si hanno diverse classificazione dei modi:

- AUTOVALORI REALI, i modi assumono un andamento APERIODICO rappresentato da esponenziali
  - CRESCENTI modi INSTABILI : $\lambda_i > 0$
  - COSTANTI modi STABILI : $\lambda_i = 0$
  - DECRESCENTI modi ASINTOTICAMENTE STABILI . $\lambda_i < 0$
- COPPIE DI AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI, la coppia di modi associata ad essi darà luogo ad andamenti PSEUDOPERIODICI rappresentato da armoniche modulate da esponenziali
  - CRESCENTI modi INSTABILI : $Re(\lambda_i) > 0$
  - COSTANTI modi STABILI $Re(\lambda_i) = 0$
  - DECRESCENTI modi ASINTOTICAMENTE STABILI $Re(\lambda_i) < 0$

si prende la parte reale

Le armoniche dei modi pseudoperiodici hanno pulsazioni pari alla parte immaginaria degli autovalori ad esse associata.

Tornando all'evoluzione libera dello stato, il modo naturale i-esimo si dice ECCITATO DALLO STATO INIZIALE x_0, se contribuisce alla costruzione dell'evoluzione libera, cioè se:

$$\boxed{\alpha_i = v_i^T x_0 \neq 0} \Rightarrow \text{"ecc." cioè contribuisce all'evoluzione libera} \quad (1.12)$$

Sostituendo la definizione di esponenziale di matrice possiamo calcolare

$$x_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T B \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau \quad (1,13a)$$

$$y_{\ell ib}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)} C u_i \qquad \alpha_i = v_i^T x_0 \quad (1.13b)$$

$$y_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} C u_i v_i^T B \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_i \tau} u(\tau)\, d\tau + D u(t) \quad (1.13c)$$

La matrice A a coefficienti reali, i suoi autovalori sono reali e/o a coppie complessi coniugati.
Come conseguenza, se u_i è un autovettore associato all'autovalore complesso λ_i, allora u_i^* è un autovettore associato all'autovalore λ_i^*, analogamente, v_i^T e v_i^{*T} sono autovettori sinistri associati, a λ_i e λ_i^*.
Nel caso di coppie di autovalori complessi coniugati, i rispettivi termini che compongono le evoluzioni del sistema, equazioni di $x_{lib}(t)$, $x_{for}(t)$ e $y_{for}(t)$, ovvero la potenza e l'esponenziale di matrice, equazioni di A^k, e^{At}, sono anch'essi coppie complesse coniugate, per cui, la loro somma può scriversi direttamente come il doppio della loro parte reale.
Ad esempio, per l'evoluzione libera dello stato:

$$\alpha_i e^{\lambda_i t} u_i + (\alpha_i e^{\lambda_i t} u_i)^* = 2\mathrm{Re}[\alpha_i e^{\lambda_i t} u_i] \qquad (1.14)$$

Il modo i-esimo si dice ACCETTABILE PER IMPULSI IN INGRESSO se esiste almeno un ingresso impulsivo del tipo $u(t) = \delta(t-t_0)e_j$, con $\delta(t-t_0)$ centrato in t_0, e_j j-esimo elemento della base naturale di $\mathbb{R}^p$, tale da produrre il modo i-esimo nella risposta forzata dello stato.

$$x_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T B e_j \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} \delta(\tau - t_0)\, d\tau = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i v_i^T b_j \qquad (1.15)$$

dove b_j è la j-esima colonna di B, per cui l'ACCETTABILITÀ di un modo per impulsi in ingresso è garantita se e solo se

$$\exists j \in \{1, \dots, p\} : v_i^T b_j \neq 0 \iff v_i^T B \neq 0 \qquad (1.16)$$

Si parla di OSSERVABILITÀ IN USCITA di un modo se esso è presente nell'evoluzione dell'uscita legata allo stato, ossia se è presente nel termine $Cx(t)$.
Riferiamoci di nuovo alla decomposizione spettrale:

$$Cx(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i (t-t_0)} C u_i + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-\tau)} C u_i v_i^T B u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C u_i \left(\alpha_i e^{\lambda_i (t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i (t-\tau)} v_i^T B u(\tau)\, d\tau \right) \qquad (1.17)$$

Quindi l'osservabilità in uscita si ottiene se e solo se

$$C u_i \neq 0 \quad (1.18)$$

Il calcolo dell'esponenziale di matrice può essere svolto utilizzando la definizione per cui è garantita l'eccitabilità.
Un caso è le matrici NILPOTENTI, per le quali

$$\exists \bar{k} \in \mathbb{Z}^+ : \forall k > \bar{k} \Rightarrow A^k = 0 \quad (1.19)$$

In tal caso si parla di matrice NILPOTENTE DI ORDINE $\bar{k}$.
Per queste matrici, il calcolo dell'esponenziale si riduce a:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\bar{k}} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (1.20)$$

per riconoscerla vale la seguente proposizione:
PROPOSIZIONE: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è nilpotente se, e solo se, tutti i suoi autovalori sono nulli. In tal caso è nilpotente di ordine $\bar{k} < n$.
Una decomposizione delle evoluzioni, alternativa a quelle viste nell'equazione (2), può avere luogo se esiste la RISPOSTA A REGIME PERMANENTE. Facendo riferimento all'uscita, essa esiste ed è definita come:

$$y_{reg}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} y(t) \quad (1.21)$$

quando tale limite esiste ed è unico, per ogni stato iniziale x_0.
Si può dimostrare che la condizione sufficiente per l'**esistenza** della risposta a regime è che il sistema sia ASINTOTICAMENTE STABILE.
Tale condizione **non è necessaria**, in quanto, per **garantire** la sua esistenza, basta che l'evoluzione libera dell'uscita converga a zero per ogni istante **iniziale**, cioè è necessario che i modi non asintoticamente stabili **non** siano osservabili in uscita.

Sotto queste ipotesi, la risposta del sistema può decomporsi come differenza:

$$y_{tra}(t) = y(t) - y_{reg}(t) \qquad (1.22)$$

Analogamente può decomporsi l'evoluzione dello stato nelle sue componenti a regime e di transitorio.
In questo caso l'asintotica stabilità è una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del regime permanente per l'evoluzione dello stato.

Nel caso in cui i segnali d'ingresso siano segnali canonici, quali, ad esempio, polinomi, esponenziali, armoniche, la risposta a regime permanente, se esiste, è ancora un segnale canonico del tipo di quello d'ingresso.
In particolare, si parla di RISPOSTA AL GRADINO di un sistema per segnali d'ingresso a gradino del tipo:

$$\delta_{-1}(t-\bar{t}) = \begin{cases} 1, & \text{per } t \geq \bar{t} \\ 0 & \text{per } t < \bar{t} \end{cases} \qquad (1.23)$$

e di RISPOSTA ARMONICA di un sistema per ingressi di tipo armonico.

2) SISTEMI A TEMPO CONTINUO: ANALISI IN FREQUENZA

L'evoluzione di un sistema lineare stazionario a tempo continuo può essere analizzata mediante l'uso delle ~~TRASFO~~ TRASFORMATA DI LAPLACE.

Essa è una trasformazione integrale che associa ad una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la seguente funzione complessa ad argomento complesso $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s \in D \in \mathbb{C} \qquad (2.1)$$

PROPOSIZIONE: Condizione sufficiente affinché la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ammetta trasformata di Laplace è che siano verificate entrambe le seguenti condizioni:

i) $f(t)$ sia continua a tratti in un qualunque intervallo $[0,T]$ con $T>0$ grande a piacere, ossia $\forall T>0$, $f(t)$ abbia al più un numero finito di punti di discontinuità all'interno di $[0,T]$ e, in corrispondenza di questi punti, esistano comunque il limite destro e il limite sinistro.

ii) $f(t)$ sia di ordine esponenziale, ossia

$$\exists M>0, \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} : \quad \|f(t)\| \leq M e^{\gamma t}. \qquad (2.2)$$

In questi casi la trasformata di Laplace esiste

$$\forall s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}[s] > \gamma.$$

Sono funzioni continue e di ordine esponenziale le funzioni costanti, i polinomi, le esponenziali, le armoniche e i prodotti di tali funzioni.

Esistono anche funzioni che non soddisfano entrambe le condizioni, ma ammettono trasformate di Laplace.

Adottiamo la convenzione di indicare il generico segnale $f(t)$ nel dominio del tempo con la lettera minuscola e la sua trasformata $F(s)$ con la maiuscola.

le matrici, invece, sono indicate indistintamente con la lettera maiuscola, perché si evince dal contesto se sono costruite nel dominio del tempo o in frequenza.

PROPRIETÀ

La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà:

1) LINEARITÀ

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \qquad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C} \qquad (2.3)$$

2) TRASLAZIONE NEL TEMPO

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s) \qquad \tau \geq 0,\ f(t) = 0,\ \text{per } t<0 \qquad (2.4)$$

3) TRASLAZIONE IN FREQUENZA

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a) \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (2.5)$$

4) DERIVATA

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^+) \qquad (2.6)$$

5) INTEGRALE

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad (2.7)$$

6) CONVOLUZIONE

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau\right] = F(s)\, G(s) \qquad (2.8)$$

7) LIMITI NOTEVOLI (nel caso in cui i limiti sotto indicati esistano).

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

(2.9)

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{t\to 0} sF(s)$$

Nel dominio complesso le equazioni ① dell'analisi nel tempo, appena descritte, diventano:

$$\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x(t_0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \qquad (2.10)$$

da cui

- $X_{lib}(s) = (sI-A)^{-1}x(t_0)$
- $X_{for}(s) = (sI-A)^{-1}BU(s)$ (2.11)

e

- $Y_{lib}(s) = C(sI-A)^{-1}x(t_0)$
- $Y_{for}(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s) + DU(s)$

la funzione di trasferimento risulta

$$W(s) = \mathcal{L}[W(t)] = C(sI-A)^{-1}B + D \qquad (2.12)$$

TRASFORMATE MAGGIORMENTE UTILIZZATE

1) IMPULSO MATEMATICO

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \qquad (2.13)$$

2) GRADINO

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s} \qquad (2.14)$$

3) RAMPA LINEARE

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \qquad (2.15)$$

4) INGRESSO CANONICO DI ORDINE K

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{s^{k+1}} \qquad k \in \mathbb{N} \qquad (2.16)$$

5) ESPONENZIALE

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (2.17)$$

6) SENO

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \omega \in \mathbb{R} \qquad (2.18)$$

7) COSENO

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \omega \in \mathbb{R} \qquad (2.19)$$

8) INGRESSO CANONICO DI ORDINE K MODULATO DA UN'ESPONENZIALE

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{(s-a)^{k+1}} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{N} \qquad (2.20)$$

9) SENO MODULATO DA UN'ESPONENZIALE

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \qquad a,\omega \in \mathbb{R} \qquad (2.21)$$

10) COSENO MODULATO DA UN'ESPONENZIALE

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos(\omega t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \qquad a,\omega \in \mathbb{R} \qquad (2.22)$$

La formula per antitrasformare una funzione di variabile complessa s è:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)\, e^{ts}\, ds \qquad \gamma+j\omega \in D \subseteq \mathbb{C} \qquad (2.23)$$

è un integrale fatto lungo la retta a parte reale costante del piano complesso ($Re[s]=\gamma$), contenuta nel dominio di definizione della $F(s)$, al variare della parte immaginaria da $-\infty$ a $+\infty$.

Di seguito si espone un algoritmo alternativo per antitrasformare elementi della classe di funzioni di variabile complessa rappresentate da un rapporto proprio di polinomi.

A questa classe appartengono i segnali (2.13) e (2.22).

Anche il termine $(sI-A)^{-1}$, trasformata di Laplace della matrice di transizione dello stato, che interviene come fattore nell'evoluzione dello stato e dell'uscita (2.11), contribuisce in ragione di un rapporto strettamente proprio di polinomi. Ad esempio, supponendo di avere tutti gli autovalori del sistema distinti:

$$(sI-A)^{-1} = \mathcal{L}[e^{At}] = \mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-\lambda_i} u_i v_i^T \qquad (2.24)$$

Per questi motivi l'evoluzione dei sistemi stazionari a dimensione finita, compatibile con i segnali d'ingresso precedentemente descritti, coincide ~~neces~~ necessariamente con un rapporto proprio di polinomi.

- Nell'ipotesi di essere in presenza di soli <u>POLI SEMPLICI</u>, si ha:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad \deg(N(s)) \le n \qquad (2.25)$$

con p_i poli della $F(s)$.
In questi casi è di aiuto la SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI DELLA FRAZIONE, ossia:

$$F(s) = R_0 + \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{R_n}{s-p_n} \qquad (2.26)$$

con

$$R_0 = \lim_{s\to\infty} F(s) \qquad R_i = \lim_{s\to p_i} (s-p_i)F(s) \qquad i=1,\dots,n \qquad (2.27)$$

I coefficienti R_i sono detti RESIDUI e hanno le stesse dimensioni della funzione da antitrasformare.
Applicando la (2.17) e l'antitrasformata di (2.26) risulta

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = R_0\delta(t) + R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \cdots + R_n e^{p_n t} \qquad (2.28)$$

• Nel caso di COPPIE DI POLI COMPLESSI CONIUGATI, ad esempio $p_1 = a + j\omega$, $p_2 = a - j\omega$, può essere utile scomporre la frazione nel seguente modo:

$$F(s) = R_0 + \frac{\tilde{R}_1 \omega}{(s-a)^2 + \omega^2} + \frac{\tilde{R}_2 \omega}{(s-a)^2 + \omega^2} + \dots + \frac{R_n}{s - p_n} \qquad (2.29)$$

con

$$\tilde{R}_1 + j\tilde{R}_2 = \frac{1}{\omega} \lim_{s \to a + j\omega} \left((s-a)^2 + \omega^2 \right) F(s) \qquad (2.30)$$

applicando la (2.21) e (2.22)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = R_0 \delta(t) + \tilde{R}_1 e^{at} \sin(\omega t) + \tilde{R}_2 e^{at} \cos(\omega t) + \dots + R_n e^{p_n t} \qquad (2.31)$$

• La presenza di POLI MULTIPLI nella risposta in frequenza di un sistema può essere dovuta ad autovalori multipli ovvero a segnali d'ingresso canonici di ordine $k \geq 0$.
In questi casi si utilizza la scomposizione in fratti multipli, che produce nella scomposizione della $F(s)$ termini del tipo:

$$\frac{R_i^1}{s - p_i} + \frac{R_i^2}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{R_i^k}{(s - p_i)^k} \qquad (2.32)$$

con

$$R_i^j = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{s \to p_i} \frac{d^{k-j}}{ds^{k-j}} \left[(s - p_i)^k F(s) \right] \qquad j = 1, \dots, k \qquad (2.33)$$

Antitrasformando i termini descritti dalla (2.32), utilizzando la (2.20), si ottiene

$$R_i^1 e^{p_i} + R_i^2 t e^{p_i} + \dots + R_i^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i} \qquad (2.34)$$

Per quel che riguarda la funzione di trasferimento del sistema W(s), applicando la 2.24

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-\lambda_i} C u_i v_i^T B + D \qquad (2.35)$$

Si noti che ogni modo inosservabile in uscita ($C u_i = 0$) o non eccitabile per impulsi d'ingresso ($v_i^T B = 0$) produce l'annullamento del corrispondente addendo nell'equazione 2.35, riducendo il grado del denominatore.

Ad ogni polo della funzione di trasferimento corrisponde un autovalore di A e viceversa, ad ogni autovalore di A corrisponde un polo della W(s) solo se il modo ad esso associato è osservabile in uscita ed eccitabile per impulsi in ingresso.

W(s) NON È STRETTAMENTE PROPRIA solo se c'è un legame diretto ingresso/uscita, ossia $D \neq 0$.

- In questi casi il grado del polinomio al numeratore è uguale al grado del polinomio al denominatore.

Infine, la RISPOSTA A REGIME PERMANENTE: poichè, se esiste, i modi osservabili sono tutti STABILI ASINTOTICAMENTE, il calcolo si semplifica trascurando nella scomposizione in fratti della trasformata di Laplace della risposta forzata del sistema, che a regime vanno a zero.

In particolare, applicando i limiti notevoli 2.9, la RISPOSTA AL GRADINO è data da:

$$y_g(t) = \lim_{s \to 0} W(s) \qquad (2.36)$$

Per quel che riguarda la RISPOSTA ARMONICA, essa si calcola nel seguente modo:

$$u(t) = M \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\Downarrow \qquad (2.37)$$
$$Y_{arm}(t) = M|W(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$$

3) [redacted]

SISTEMI A TEMPO DISCRETO: ANALISI NEL TEMPO

I sistemi lineari stazionari a tempo discreto a dimensione finita sono descritti dalle seguenti equazioni lineari ricorsive:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad t \geq t_0 \qquad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è lo STATO del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ sono gli INGRESSI, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ sono le USCITE.

In virtù della proprietà di linearità, le soluzioni del sistema possono esprimersi come somma dei contributi di EVOLUZIONE LIBERA e FORZATA, come visto in (1.2) per i sistemi a tempo continuo, con:

$$x_{lib}(t) = A^{t-t_0} x_0$$
$$x_{for}(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau) \qquad (3.2a)$$

e

$$y_{lib}(t) = CA^{t-t_0} x_0$$
$$y_{for}(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu(\tau) + Du(t) \qquad (3.2b)$$

la risposta forzata dell'uscita può scriversi come un'unica somma di convoluzione dell'ingresso con la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $W(t)$:

$$W(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B & t > 0 \\ D & t = 0 \end{cases} \qquad (3.3)$$

quindi

$$y_{for}(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)$$

è nota anche come RISPOSTA IMPULSIVA del sistema, in quanto le sue colonne coincidono con la risposta forzata dall'ingresso impulsivo

$$u(t) = e_i \delta(t)$$

con e_i elemento i-esimo della base naturale di $\mathbb{R}^r$ e $\delta(t)$ la DELTA DI KRONECKER, nota anche come IMPULSO MATEMATICO, definito come:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \qquad (3.4)$$

Nel caso di sistemi a tempo discreto, il calcolo della risposta del sistema passa attraverso la costruzione della potenza di matrice, per cui è possibile realizzarla attraverso la (1.8), calcolata in precedenza utilizzando opportunamente la DECOMPOSIZIONE SPETTRALE della matrice A.

Ma nel caso di autovalore nullo, $\lambda_1 = 0$, la (1.8) diventa:

$$A^t = \delta(t)\, u_1 v_1^T + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^t u_i v_i^T \qquad (3.5)$$

per garantire la proprietà di COESISTENZA $A^0 = I$.

Sviluppando lo stato iniziale lungo le coordinate individuate dalla base degli autovettori destri (1.10), è possibile decomporre, analogamente al caso continuo, l'evoluzione libera dello stato nella somma dei seguenti n MODI NATURALI:

$$x_{lib}(t) = A^{t-t_0} x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{t-t_0} u_i \quad , \quad \alpha_i = v_i^T x_0 \qquad (3.6)$$

La classificazione dei modi in APERIODICI e PSEUDOPERIODICI resta invariata rispetto al caso tempo continuo.

in particolare, il periodo delle armoniche di questi ultimi hanno una pulsazione pari alla fase degli autovalori ad esse associati.

Cambiano, invece, le condizioni di stabilità: in accordo alla natura a tempo discreto del sistema, si definiscono:

- MODI INSTABILI $\lambda_i > 1$
- MODI STABILI $\lambda_i = 1$
- MODI ASINTOTICAMENTE STABILI $\lambda_i < 1$

Valgono, inoltre, le stesse condizioni di ECCITABILITÀ DA UNO STATO INIZIALE x_0.

Utilizzando la decomposizione spettrale, l'evoluzione forzata dello stato e l'evoluzione libera e forzata dell'uscita sono:

$$x_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{t-1} u_i v_i^T B \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \lambda_i^{-\tau} u(\tau), \qquad (3.7a)$$

$$y_{lib}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^{t-t_0} C u_i \quad , \quad \alpha_i = v_i^T x_0 \qquad (3.7b)$$

$$y_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{t-1} C u_i v_i^T B \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \lambda_i^{-\tau} u(\tau) + D u(t) \qquad (3.7c)$$

In presenza di coppie di autovalori complessi coniugati, la somma dei rispettivi termini, coniugati anch'essi, può direttamente scriversi come il doppio della loro parte reale.

La condizione di ECCITABILITÀ PER IMPULSI IN INGRESSO vale se esiste almeno un ingresso impulsivo del tipo

$$u(t) = \delta(t-t_0)\, e_i$$

con $\delta(t-t_0)$ impulso matematico discreto centrato in t_0 e e_i i-esimo elemento della base naturale di $\mathbb{R}^r$.

tale da produrre il modo i-esimo nella risposta forzata dello stato.

- Anche in questo caso l'ECCITABILITÀ PER IMPULSI DI INGRESSO è soddisfatta se, e solo se, vale la (1.16).

- Anche nel tempo discreto, inoltre, l'OSSERVABILITÀ IN USCITA di un modo è soddisfatta se, e solo se, $c_{ii} \neq 0$.

Valgono le stesse considerazioni svolte a riguardo della decomposizione della risposta di un sistema in REGIME PERMANENTE e TRANSITORIO.

Spesso un sistema a tempo discreto è derivato dalla ~~discretizzazione~~ discretizzazione di un sistema a tempo continuo. Posto T il passo di discretizzazione, l'evoluzione a un passo dello stato $x(KT)$ è data da:

$$x((K+1)T) = e^{AT} x(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A(KT+T-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

Supponendo di mantenere, nell'intervallo di campionamento, il segnale d'ingresso, attraverso un dispositivo di tenuta di ordine zero (ZOH: zero order hold), $u(t)$ si trasforma in:

$$u_c(\tau) = u(KT) \qquad \forall \tau \in [KT, (K+1)T] \qquad K \in \mathbb{Z}$$

sostituendo $u\big|_{[KT,(K+1)T)} = u_c\big|_{[KT,(K+1)T)}$ in (3.8), si ottiene:

$$x((K+1)T) = e^{AT} x(KT) + \int_0^T e^{A\sigma}\, d\sigma\, B u(KT)$$

da cui:

$$x((K+1)T) = A_d x(KT) + B_d(KT) \qquad \begin{cases} A_d = e^{AT} \\ B_d = \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma B \end{cases}$$

In alternativa, se la matrice A è invertibile, la matrice B_d può calcolarsi anche come:

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B$$

Le matrici di uscita non subiscono variazioni dal processo di discretizzazione: $C_d = C$, $D_d = D$.

Si considerino i modi naturali di un sistema discretizzato, per cercare una relazione con i corrispondenti modi del sistema a tempo continuo; dalla definizione della A_d:

$$A_d = e^{AT} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i T} u_i v_i^T$$

segue che gli autovalori del sistema discretizzato, indicati con $\tilde{\lambda}_i$, si ricavano da quelli del sistema a tempo continuo di partenza:

$$\tilde{\lambda}_i = e^{\lambda_i T}$$

Le caratteristiche di stabilità del sistema, dunque, sono mantenute nel passaggio dal tempo continuo al tempo discreto:

1) INSTABILITÀ $\qquad Re[\lambda_i] > 0 \Rightarrow |\tilde{\lambda}_i| = |e^{Re[\lambda_i]T}| > 1$

2) STABILITÀ $\qquad Re[\lambda_i] = 0 \Rightarrow |\tilde{\lambda}_i| = |e^{Re[\lambda_i]T}| = 1$

3) STABILITÀ ASINTOTICA $\qquad Re[\lambda_i] < 0 \Rightarrow |\tilde{\lambda}_i| = |e^{Re[\lambda_i]T}| < 1$

Gli autovettori destri e sinistri sono gli stessi e, dunque, l'eccitabilità dallo stato e l'osservabilità in uscita del modo a tempo discreto associato all'autovalore $\tilde{\lambda}_i$ sono verificate se, e solo se, è eccitabile/osservabile il modo a tempo continuo associato all'autovalore λ_i.

Analogamente a quanto visto per la A_d, si utilizza la decomposizione spettrale di A per scrivere la matrice B_d:

$$B_d = \int_0^T e^{A\sigma} B\, d\sigma = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \sigma} u_i v_i^T B\, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T e^{\lambda_i \sigma} d\sigma\, u_i v_i^T B = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\lambda_i T} - 1}{\lambda_i} u_i v_i^T B$$

Questa formula vale solo se tutti gli autovalori sono diversi da zero.
In caso contrario, supponendo, ad esempio che sia $\lambda_1 = 0$, si ottiene:

$$B_d = T u_1 v_1^T B + \sum_{i=2}^{n} \frac{e^{\lambda_i T} - 1}{\lambda_i} u_i v_i^T B.$$

Da questo si deduce che anche l'eccitabilità per impulsi in ingresso di un modo del sistema a tempo discreto dipende dall'eccitabilità per impulsi in ingresso del modo equivalente a tempo continuo.
Infatti facendo riferimento ad autovalori tutti diversi da zero

$$v_k^T B_d = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\lambda_i T} - 1}{\lambda_i} v_k^T u_i v_i^T B = \frac{e^{\lambda_k T} - 1}{\lambda_k} v_k^T B = 0$$

se e solo se

$$v_k^T B = 0$$

Se v_k^T è associato ad un autovalore nullo, si ottiene:

$$v_k^T B_d = T v_k^T B = 0 \iff v_k^T B = 0$$

Notiamo che nel processo di discretizzazione proposto, l'unica approssimazione consiste nel campionamento e mantenimento del segnale d'ingresso.
Se l'ingresso è di per sé un segnale costante a tratti, le operazioni di campionamento e tenuta non alterano il segnale, per cui la DISCRETIZZAZIONE È ESATTA.
In questi casi è possibile avere informazioni esatte sui campioni dell'uscita, utilizzando opportunamente la discretizzazione del sistema a tempo continuo: questo procedimento il più delle volte riduce la mole dei conti (la trasformata di Laplace di un segnale costante a tratti non è sempre agevole, né garantisce di avere un rapporto di polinomi.

4) [redacted]

A tempo discreto, l'evoluzione di un sistema lineare può essere analizzata mediante opportune trasformate.

Si definisce TRASFORMATA ZETA la trasformazione che associa ad una funzione $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ la seguente funzione complessa ad argomento complesso $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$:

$$Z[f(t)] = F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} \qquad (4.1)$$

Come si può notare la trasformata Zeta di un segnale a tempo discreto è la serie di potenze, i cui coefficienti sono dati dai valori della funzione.

Essa è assolutamente convergente all'esterno del cerchio centrato nell'origine del piano complesso di raggio R, con

$$R = \lim_{t \to \infty} \left(f(t) \right)^{\frac{1}{t}} \qquad (4.2)$$

<u>PROPRIETÀ</u>

La trasformata Zeta gode delle seguenti proprietà:

1) LINEARITÀ

$$Z[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad (4.3)$$

2) TRASLAZIONE NEL TEMPO

$$Z[f(t-\tau)] = z^{-\tau} F(z) \qquad \tau \geq 0 \quad f(t) = 0 \text{ per } t < 0 \qquad (4.4a)$$

$$Z[f(t-1)] = zF(z) - zf(0) \qquad (4.4b)$$

3) CAMBIO DI SCALA

$$Z[a^t f(t)] = F\left(\frac{z}{a}\right) \qquad a \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \qquad (4.5)$$

4) TRASFORMATE DI FUNZIONI MODULATE DA POLINOMI

$$Z[t^k f(t)] = D_z^k [F(z)]$$

$$D_z [F(z)] = -z \frac{dF}{dz} \qquad k \in \mathbb{N} \qquad (4.6)$$

5) CONVOLUZIONE

$$Z\left[\sum_{\tau=0}^{t} f(t-\tau)\, g(\tau)\right] = F(z)\,G(z) \qquad (4.7)$$

6) LIMITI NOTEVOLI (nel caso in cui i limiti sottoindicati esistano)

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{z\to 1} (z-1)\,F(z) \quad , \quad f(t)\Big|_{t=0} = \lim_{z\to\infty} F(z) \qquad (4.8)$$

Utilizzando queste proprietà, è facile verificare che, nel dominio complesso, le equazioni ricorsive che descrivono il sistema a tempo discreto diventano le seguenti equazioni algebriche:

$$\begin{cases} X(z) = z(zI-A)^{-1}x(t_0) + z(zI-A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases} \qquad (4.9)$$

da cui

$$- X_{lib}(z) = z(zI-A)^{-1}x(t_0)$$

$$- X_{for}(z) = (zI-A)^{-1}BU(z) \qquad (4.10)$$

e

$$- Y_{lib}(z) = zC(zI-A)^{-1}x(t_0)$$

$$- Y_{for}(z) = C(zI-A)^{-1}BU(z) + DU(z)$$

dunque la funzione di trasferimento risulta:

$$W(z) = Z[W(t)] = C(zI-A)^{-1}B + D \qquad (4.11)$$

TRASFORMATE MAGGIORMENTE UTILIZZATE

1) IMPULSO MATEMATICO

$$Z[\delta(t)] = 1 \qquad (4.12)$$

2) GRADINO

$$Z[\delta_{-1}(t)] = \frac{z}{z-1} \qquad (4.13)$$

dove

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

3) RAMPA LINEARE

$$\mathcal{Z}[t] = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad (4.14)$$

4) POLINOMIO FATTORIALE DI GRADO K

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^{(k)}}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}} \qquad \begin{cases} t^{(0)} = 1 \\ t^{(k)} = t(t-1)^{(k-1)} \end{cases} \quad k \in \mathbb{N} \qquad (4.15)$$

5) POTENZA

$$\mathcal{Z}[a^t] = \frac{z}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (4.16)$$

6) SENO

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1} \qquad \omega \in \mathbb{R} \qquad (4.17)$$

7) COSENO

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega t)] = \frac{z(z - \cos(\omega))}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1} \qquad \omega \in \mathbb{R} \qquad (4.18)$$

8) POLINOMIO FATTORIALE DI GRADO K, MODULATO DA UNA POTENZA

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^{(k)}}{k!} a^t\right] = \frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}} \qquad k \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R} \qquad (4.19)$$

9) SENO MODULATO DA UNA POTENZA

$$\mathcal{Z}[a^t \sin(\omega t)] = \frac{a z \sin(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2} \qquad a, \omega \in \mathbb{R} \qquad (4.20)$$

10) COSENO MODULATO DA UNA POTENZA

$$\mathcal{Z}[a^t \cos(\omega t)] = \frac{a z \sin(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2} \qquad a, \omega \in \mathbb{R} \qquad (4.21)$$

11) SEGNALE PERIODICO DI PERIODO $\Delta > 0$

$$\mathcal{Z}[w(t)] = \frac{z^\Delta}{z^\Delta - 1} \sum_{\tau=0}^{\Delta-1} w(\tau) z^{-\tau}, \quad w(t) = w(t+\Delta) \quad \forall t \in \mathbb{Z} \qquad (4.22)$$

12) SEGNALI CON UNA ESTENZIONE TEMPORALE FINITA

$$Z[u(t)] = \sum_{\tau=0}^{\bar{t}} u(t)\, z^{-\tau} \quad ; \quad \bar{t} : u(\tau) = 0 \quad \forall \tau > \bar{t} \qquad (4.23)$$

La formula per antitrasformare un segnale di variabile complessa Z è:

$$Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z)\, dz \qquad (4.24)$$

È un integrale nella variabile complessa z, calcolato lungo una qualsiasi curva chiusa Γ che appartenga completamente al dominio di convergenza e che contenga l'origine degli assi al suo interno.

Anche per i sistemi lineari stazionari a dimensione finita a tempo discreto, in presenza dei segnali di eccitazione, come quelli descritti dalle (4.12) e (4.22), le risposte del sistema nel dominio trasformato Z sono rapporti propri di polinomi in z.

Nell'ipotesi di AUTOVALORI DISTINTI, la trasformata Zeta della potenza di matrice è data da:

$$z(zI - A)^{-1} = Z[A^t] = Z\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t u_i v_i^T\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{z}{z-\lambda_i}\, u_i v_i^T \qquad (4.25)$$

Dunque, restringendo l'operazione di antitrasformata alla classe dei rapporti propri di polinomi, ci si avvale ancora della scomposizione in fratti già vista per l'antitrasformata di Laplace.

- Si suppongono, ad esempio, solo POLI SEMPLICI, in questo caso è consigliabile scomporre la funzione:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{R_0}{z} + \frac{R_1}{z-p_1} + \frac{R_2}{z-p_2} + \dots + \frac{R_n}{z-p_n} \qquad (4.26)$$

con

$$R_0 = \lim_{z \to 0} F(z) \quad ; \quad R_i = \lim_{z \to p_i} \frac{(z-p_i)\, F(z)}{z} \quad , \quad i = 1, \dots, n \qquad (4.27)$$

cosicché, in accordo con la (4.12) e (4.16), l'antitrasformata di $F(z)$ sia:

$$Z^{-1}[F(z)] = R_0 \delta(t) + R_1 p_1^t + R_2 p_2^t + \dots + R_n p_n^t \qquad (4.28)$$

- Nel caso di COPPIE DI POLI COMPLESSI, ad esempio $p_1 = a e^{j\omega}$, $p_2 = a e^{-j\omega}$, può essere utile scomporre la frazione nel seguente modo:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{R_0}{z} + \frac{\tilde{R}_1 a \sin(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2} + \frac{\tilde{R}_2 (z - \cos(\omega))}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2} + \dots + \frac{R_n}{z - p_n} \qquad (4.29)$$

con

$$\tilde{R}_1 + j\tilde{R}_2 = \frac{1}{a \sin(\omega)} \lim_{z \to a e^{j\omega}} \frac{(z^2 + 2az\cos(\omega) + a^2)\, F(z)}{z} \qquad (4.30)$$

utilizzando le (4.20), (4.21)

$$Z^{-1}[F(z)] = R_0 \delta(t) + \tilde{R}_1 a^t \sin(\omega t) + \tilde{R}_2 a^t \cos(\omega t) + \dots + R_n p_n^t \qquad (4.31)$$

- Nel caso di POLI MULTIPLI si utilizza la scomposizione in fratti multipli: sia p_i un polo di molteplicità k. Allora nella scomposizione della $\frac{F(z)}{z}$ ci sono termini del tipo:

$$\frac{R_i^1}{z - p_i} + \frac{R_i^2}{(z-p_i)^2} + \dots + \frac{R_i^k}{(z-p_i)^k} \qquad (4.32)$$

con

$$R_i^j = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{z \to p_i} \frac{d^{k-j}}{dz^{k-j}} \left[\frac{(z-p_i)^k F(z)}{z} \right] \quad , \quad j = 1, \dots, k \qquad (4.33)$$

utilizzando la (4.19), si antitrasformano i termini:

$$\frac{z R_i^1}{z - p_i} + \frac{z R_i^2}{(z + p_i)^2} + \dots + \frac{z R_i^k}{(z - p_i)^k} \qquad (4.34)$$

e si ottiene

$$R_i^1 p_i^t + \frac{R_i^2}{p_i} t p_i^t + \dots + \frac{R_i^k}{p_i^{k-1} (k-1)!} t^{(k-1)} a^t \qquad (4.35)$$

Considerando la funzione di trasferimento del sistema $W(z)$ e applicando la (4.25):

$$W(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\lambda_i} C u_i v_i^T B + D \qquad (4.36)$$

per cui ogni modo inosservabile in uscita ($Cu_i = 0$) o non eccitabile per impulsi in ingresso ($v_i^T B = 0$) produce l'annullamento del corrispondente addendo in (4.36), riducendo il grado del denominatore.
Anche in questo caso ad ogni polo della funzione di trasferimento corrisponde un autovalore di A; viceversa: ad ogni autovalore di A corrisponde un polo della $W(z)$ solo se c'è un legame diretto ingresso/uscita, ossia $D \neq 0$.
In questi casi il grado del polinomio al numeratore è uguale al grado del polinomio al denominatore.

Per quel che riguarda la RISPOSTA A REGIME PERMANENTE: se esiste, i modi osservabili sono tutti STABILI ASINTOTICAMENTE e il calcolo si semplifica trascurando nella scomposizione in fratti della trasformata Z della risposta forzata del sistema i termini che hanno come poli gli autovalori del sistema, che a regime vanno a zero.
In particolare applicando i limiti notevoli (4.8), la risposta al gradino è data da:

$$y_g(t) = \lim W(z) \qquad (4.37)$$

Mentre la RISPOSTA ARMONICA del sistema si calcola nel seguente modo:

$$u(t) = M \sin(\omega t + \varphi) \qquad (4.38)$$

$$\Rightarrow y_{arm}(t) = M |W(e^{j\omega})| \sin(\omega t + \varphi + \angle W(e^{j\omega}))$$