RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

1° CAPITOLO (27)
Diagrammi di Bode

2° CAPITOLO (41)
Diagrammi polari

1) DIAGRAMMI DI BODE

Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo continuo, con un legame ingresso/uscita descritto dalla funzione di trasferimento $W(s)$, descritta dalla (1.2.12).

Da quello che abbiamo visto, la funzione di trasferimento di un sistema lineare stazionario a ~~dimensione~~ dimensione finita è un rapporto di polinomi nella variabile complessa s e l'ipotesi di causalità garantisce che il grado del denominatore non sia minore di quello del numeratore; in presenza di un legame diretto ingresso/uscita ($D \neq 0$), $W(s)$ è un rapporto strettamente proprio di polinomi.

Porre in FORMA CANONICA la funzione di trasferimento equivale a scriverla, in modo univoco, come rapporto delle potenze dei seguenti fattori:

1) TERMINI MONOMI: $\underline{s}$.
   Corrispondono a zeri/poli nell'origine;

2) TERMINI BINOMI: $\underline{1+\tau s}$, $\tau \in \mathbb{R}$.
   Corrispondono a zeri/poli reali; $\omega_t = \frac{1}{|\tau|}$ è detta PULSAZIONE DI TAGLIO del termine binomio;

3) TERMINI TRINOMI: $\underline{1+\frac{2\xi s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$, $|\xi|<1$, $\omega_n > 0$.

   Corrispondono a coppie di zeri/poli complessi coniugati, ξ e ω_n sono rispettivamente lo SMORZAMENTO e la PULSAZIONE DI RISONANZA del termine trinomio.

4) GUADAGNO DI BODE: $\underline{K}$.
   È la costante moltiplicativa risultante dalla scomposizione nei fattori canonici sopra descritti della funzione di trasferimento;

- in ASSENZA DI TERMINI MONOMI costituisce il guadagno alle ~~basse~~ frequenze, e si calcola come:

$$K = \lim_{s \to 0} W(s) \quad (1.1)$$

- Se c'è la POTENZA DI UN TERMINE MONOMIO al ~~denominatore~~ denominatore (sia s^p, $p>0$), si ha un'amplificazione INFINITA alle basse frequenze, il guadagno di Bode si calcola

$$K = \lim_{s \to 0} W(s)\, s^p \qquad (1.2)$$

- Se la POTENZA DI UN TERMINE MONOMIO è presente al numeratore, alle basse frequenze la risposta del sistema è nulla ($-\infty$ in dB), e il guadagno di Bode vale:

$$K = \lim_{s \to 0} \frac{W(s)}{s^p} \qquad (1.3)$$

I diagrammi di Bode sono le rappresentazioni in scala semilogaritmica del modulo (espresso linearmente in decibel) e della fase della funzione di trasferimento calcolata in $s = j\omega$, al variare della pulsazione $\omega \in (0, +\infty)$ (espressa in scala logaritmica).

In virtù delle proprietà dei logaritmi e delle fasi, entrambi i diagrammi di Bode possono rappresentarsi come somma algebrica dei contributi dei singoli diagrammi dei fattori canonici sopra descritti: i contributi dei termini al numeratore si sommano, quelli dei termini al denominatore si sottraggono ed eventuali potenze di ordine 2, 3 o p, raddoppiano, triplicano o moltiplicano per un fattore p i contributi del termine.

Di seguito sono riportate l'analisi e la rappresentazione dei diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi dei singoli fattori canonici.

Sulle ascisse di entrambi sono riportate le pulsazioni in scala logaritmica,

le ordinate dei diagrammi di Bode delle ampiezze sono espresse in decibel (ricordando che $|M|_{dB} = 20 \log |M|$), le ordinate dei diagrammi di Bode delle fasi in radianti.

Si fa riferimento al termine DECADE per indicare il generico intervallo di ampiezza unitaria in scala logaritmica, ossia l'intervallo $[\omega_1, \omega_2]$ costituisce una decade se $\omega_2 = 10\,\omega_1$.

1) IL TERMINE MONOMIO : s.

$$|j\omega|_{dB} = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega$$

$$\angle(j\omega) = \frac{\pi}{2} \quad (1.4)$$

Il diagramma di Bode delle ampiezze è una retta con pendenza 20 dB/dec, che taglia i 0 dB in corrispondenza della pulsazione di 1 rad/sec.
La fase è, invece, costante al variare di $\log \omega$ e vale $\frac{\pi}{2}$ radianti

2,1,1

2) TERMINE BINOMIO : $1 + \tau s$, $\tau \in \mathbb{R}$

$$|1 + j\tau\omega|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$\angle(1 + j\tau\omega) = \operatorname{arctg}(\tau\omega) \quad (1.5)$$

I diagrammi di Bode dei termini binomi e trinomi non hanno un andamento lineare rispetto a $\log \omega$.
Per la loro rappresentazione è consigliabile svolgere l'analisi del loro comportamento asintotico, in base al quale è possibile approssimare i diagrammi con opportune spezzate lineari a tratti.

Questi diagrammi, noti come DIAGRAMMI ASINTOTICI, sono lo strumento per disegnare e sono una buona approssimazione i veri diagrammi di Bode.
I punti di non derivabilità sono detti PUNTI DI ROTTURA del diagramma asintotico.
- Dall'analisi $\boxed{\text{alle basse frequenze}}$, per pulsazioni inferiori a quella di taglio ($\omega \ll \omega_t$):

$$1+\tau^2\omega^2 \simeq 1 \Rightarrow |1+j\tau\omega|_{dB} \simeq 20\log 1 = 0\,dB \qquad (1.6)$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta costante e pari a 0 dB
- $\boxed{\text{alle alte frequenze}}$, per pulsazioni superiori a quella di taglio ($\omega \gg \omega_t$):

$$1+\tau^2\omega^2 \simeq \tau^2\omega^2 \Rightarrow |1+j\tau\omega|_{dB} \simeq 20\log|\tau\omega| = 20(\log\omega - \log\omega_t) \qquad (1.7)$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta di pendenza 20 dB/dec, che taglia i 0 dB in corrispondenza della pulsazione di taglio ωt.
Raccordando queste due rette nel loro punto d'intersezione si disegna il diagramma asintotico.
Il massimo scostamento del diagramma di Bode dal diagramma asintotico si ottiene per la pulsazione di taglio ω_t, ed è pari a:

$$20\log\sqrt{1+\tau^2\omega_t^2} = 20\log\sqrt{2} \simeq 3{,}01\,dB \qquad (1.8)$$

2.1.2

Anche per le fasi si considera l'analisi asintotica del diagramma.

+ ~~Sia zero~~

- Alle basse frequenze ($\omega \ll \omega_t$), il termine binomio può confondersi con la sua parte reale, per cui la fase assume un andamento costante e pari a zero.
- Alle alte frequenze ($\omega \gg \omega_t$), il termine binomio può confondersi con la sua parte immaginaria, per cui la fase assume un andamento costante e pari a $\pi/2$ radianti.

In questo caso non c'è intersezione tra i due andamenti asintotici.

Per ottenere un diagramma lineare a tratti che approssimi in modo esauriente il diagramma delle fasi, si sfruttano le caratteristiche di simmetria del grafico: IL DIAGRAMMA DI BODE DELLE FASI IN SCALA SEMILOGARITMICA GODE DI SIMMETRIA CENTRALE RISPETTO AL PUNTO $(\omega_t, \frac{\pi}{4})$.

Una possibilità consiste nel raccordare i due andamenti asintotici con un segmento di pendenza $\pi/4$ rad/dec che passi per il centro di simmetria del diagramma. Tale segmento approssima il diagramma nell'intervallo di due decadi centrato nella pulsazione di taglio.

1.1.3

Il massimo scostamento delle fasi dal diagramma asintotico si ha nei punti di rottura della spezzata ($0{,}1\omega_t$ e $10\omega_t$) e vale

$$\begin{cases} arctg(\tau \cdot 0.1\omega_t) = arctg(0,1) \simeq 0,10\,rad \\ \frac{\pi}{2} - arctg(\tau \cdot 10\omega_t) = \frac{\pi}{2} - arctg(10) \simeq 0,10\,rad \end{cases} \qquad (1.5)$$

ossia meno di 6 gradi (i due valori sono uguali, data la simmetria della curva).

Un diagramma asintotico alternativo consiste nel raccordare i due andamenti asintotici con la retta tangente la curva (ω_c, $\frac{\pi}{4}$)

La tangente nella pulsazione di taglio si ricava ricordando che la scala delle ascisse è logaritmica, ossia si deriva rispetto a $z = \log \omega$.

$$\frac{d}{dz}\left[arctg(\tau\omega)\right]\Big|_{\omega=\omega_c} = \left(\frac{d}{dz}\left[arctg(\tau\omega)\right]\cdot\frac{d\omega}{dz}\right)\Big|_{\omega=\omega_c} =$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau^2\omega^2}\cdot 10^z \ln(10)\Big|_{\omega=\omega_c} = \frac{\ln(10)}{2} \simeq 1,15 \text{ rad/sec} \qquad (1.10)$$

Sfruttando la simmetria, poste $\frac{\omega_c}{\alpha}$ e $\alpha\omega_c$ le intersezioni della tangente con gli asintoti orizzontali a 0 e $\pi/2$ radianti rispettivamente, si ottiene che i punti di rottura della spezzata, che approssima il diagramma di Bode utilizzando la tangente nella pulsazione di taglio, soddisfano la seguente equazione:

$$\frac{\pi/2}{\log(\alpha\omega_c) - \log\left(\frac{\omega_c}{\alpha}\right)} = \frac{\ln(10)}{2} \qquad (1.11)$$

da cui

$$\pi = \ln(10)\, 2\log\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 10^{\frac{\pi}{2\ln(10)}} \simeq 4,81 \qquad (1.12)$$

In questo modo migliora l'approssimazione nell'intorno della pulsazione di taglio, ma peggiora quella nei punti di rottura del diagramma asintotico, in corrispondenza dei quali l'errore vale

$$arctg\left(\tau\frac{\omega_c}{\alpha}\right) = arctg(\alpha^{-1}) \simeq 0,20 \text{ rad} \qquad (1.13)$$

circa il doppio rispetto all'errore nei punti di rottura del diagramma asintotico precedentemente descritto, fig (1.4)

+ Reciproco:

<u>il diagramma dei moduli non cambia, mentre quello delle fasi è simmetrico rispetto all'asse delle pulsazioni.</u>

Cambia infatti, il segno della parte immaginaria, per cui cambia il segno della fase, fig (1.6)

3) TERMINE TRINOMIO: $1+\frac{2\xi s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}$, $|\xi|\le 1$, $\omega_n>0$

$$\left|1+\frac{2j\xi\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right|_{dB} = 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \qquad (1.14a)$$

$$\angle\left(1+\frac{2j\xi\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) \qquad (1.14b)$$

Anche per il termine trinomio è necessaria l'analisi asintotica.

- $\boxed{\text{Alle basse frequenze}}$, ossia per pulsazioni inferiori a quella di risonanza ($\omega \ll \omega_n$):

$$1+\frac{2j\xi\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \simeq 1 \Rightarrow \left|1+\frac{2j\xi\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right|_{dB} = 20\log 1 = 0\,dB \qquad (1.15)$$

il <u>diagramma dei moduli</u> si approssima con una retta costante e pari a <u>0 dB</u>.

- $\boxed{\text{Alle alte frequenze}}$, per pulsazioni superiori a quella di risonanza ($\omega \gg \omega_n$):

$$1+\frac{2j\xi\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \left|1+\frac{2j\xi\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 40(\log\omega-\log\omega_n) \qquad (1.16)$$

Il diagramma dei moduli si approssima con una retta di pendenza <u>40 dB/dec</u>, che taglia i 0 dB nella pulsazione di risonanza ω_n.

Raccordando queste due rette nel loro punto d'intersezione, si ottiene il diagramma asintotico.
Lo <u>scostamento</u>, espresso in decibel, per $\omega = \omega_n$ è pari a:

$$20 \log \sqrt{\left(1-\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega_n^2}{\omega_n^2}} = 20 \log|2\xi|$$

da cui si evince che:

- Quando il termine trinomio si scompone nel prodotto di un binomio <u>($|\xi|=1$)</u>, tale scostamento vale $20 \log 2 \simeq 6.02$ dB, fig 1.6

1.6

- Per valori di ξ <u>maggiori in modulo di $\frac{1}{2}$</u> ($\frac{1}{2} \le |\xi| \le 1$), lo scostamento è positivo e si annulla per $|\xi| = \frac{1}{2}$.
Si noti che l'annullamento nel punto di rottura non determina l'uguaglianza tra i due diagrammi, pur rendendo il diagramma asintotico molto prossimo a quello di Bode, fig 1.7

1.7

- Per valori di ξ <u>inferiori in modulo a $\frac{1}{2}$</u> ($0 \le |\xi| \le \frac{1}{2}$), il diagramma di Bode presenta un picco di risonanza in corrispondenza di ω_n, di cui il diagramma asintotico non tiene conto (per essere precisi si parla di ANTIRISONANZA se il termine trinomio è al numeratore, in quanto, in quel caso, c'è un'attenuazione delle ampiezze per le frequenze di risonanza); tale picco è sempre più accentuato al decrescere di $|\xi|$ e, di conseguenza, il diagramma asintotico è sempre meno adatto ad approssimare il diagramma di Bode nell'intorno di ω_n al decrescere di $|\xi|$, fig 1.8

1.8

- Per $\xi = 0$, in corrispondenza della pulsazione di risonanza c'è un asintoto verticale, di cui il diagramma asintotico non tiene conto e, dunque, non è più idoneo a descrivere l'andamento delle ampiezze nell'intorno di ω_n.

Se il termine trinomio è al numeratore (come si è supposto in questo contesto) l'asintoto produce attenuazione infinita, ovvero il sistema ha una risposta nulla se eccitato con un'armonica di pulsazione ω_n, fig 1.9a

1.9a

Al contrario, se il termine trinomio è al denominatore, l'asintoto produce un'amplificazione infinita se eccitato con armonica di pulsazione ω_n, fig 1.9b

1.9b

Per quel che riguarda l'analisi asintotica del diagramma delle fasi, vale §70.

- Alle basse frequenze ($\omega \ll \omega_n$) il trinomio si approssima con la sua parte reale, per cui la fase ha un andamento costante e pari a zero.
- Alle alte frequenze ($\omega \gg \omega_n$) il trinomio si confonde con $-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} < 0$, per cui la fase ha un andamento costante a π radianti (si assume il segno + perché, per ω che va da 0 a $+\infty$, il trinomio è un vettore del piano complesso che ruota in senso antiorario).

Analogamente al termine binomio non c'è intersezione tra i due asintoti e i diagrammi asintotici si ottengono sfruttando le proprietà di simmetria del grafico: il diagramma di Bode delle fasi in scala semilogaritmica gode di simmetria centrale rispetto al punto (ω_n, $\pi/2$).

Di seguito riportiamo tre tecniche per raccordare gli andamenti asintotici:

1) Consiste nel raccordare i due asintoti con un segmento di pendenza $\pi/2$ rad/dec che passi per il centro di simmetria del diagramma.
Tale segmento approssima il diagramma nell'intervallo di due decadi centrato nella pulsazione di risonanza. Questa approssimazione è buona per valori dello smorzamento prossimi in modulo all'unità ($|\xi| \simeq 1$): è tanto più efficace quanto più il termine trinomio si approssima con il quadrato di un binomio.

2) Consiste nel raccordare i due asintoti con il segmento tangente la curva in ω_n.
Per calcolare la pendenza, si deriva rispetto a $z = \log\omega$:

$$\frac{d}{dz}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)\right]_{\omega=\omega_n} = \frac{\frac{2\xi}{\omega_n}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+\frac{2\omega}{\omega_n^2}\cdot\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{\left(1+\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)^2\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}\cdot 10^z \ln(10)\Bigg|_{\omega=\omega_n} =$$

$$= \frac{\frac{2\xi}{\omega_n}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+\frac{4\xi\omega^2}{\omega_n^3}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \cdot 10^2 \ln(10)\Bigg|_{\omega=\omega_n} = \frac{\ln(10)}{\xi} \simeq \frac{2,30}{\xi} \ \text{rad / dec} \qquad (1.18)$$

Sfruttando la simmetria, posto $\frac{\omega_n}{\alpha}$ e $\alpha\omega_n$ le intersezioni della tangente con gli asintoti orizzontali a 0 e π radianti rispettivamente si ottiene che i punti di rottura soddisfano la seguente equazione:

$$\frac{\pi}{\log(\alpha\omega_n)-\log\left(\frac{\omega_n}{\alpha}\right)} = \frac{\ln(10)}{\xi}, \qquad (1.19)$$

da cui

$$\xi\pi = \ln(10)\cdot 2\log\alpha \implies \alpha = 10^{\frac{\xi\pi}{2\ln(10)}} \simeq (4,81)^{\xi} \qquad (1.20)$$

Questa approssimazione è efficace soprattutto nell'intorno della pulsazione di risonanza, e presenta il massimo dello scostamento nei punti di rottura.

3) Un'altra alternativa è:
Si suppone che il termine trinomio sia effettivamente il quadrato di un binomio, ossia $|\xi| = 1$.
Allora, utilizzando il diagramma asintotico definito su una doppia decade, il massimo dello scostamento si ha nei punti di rottura $0,1\,\omega_n$ e $10\,\omega_n$ e vale:

$$\angle\left(1+\frac{2j\cdot 0,1\omega_n}{\omega_n}-\frac{0,01\,\omega_n^2}{\omega_n^2}\right) = \angle\left(\frac{99}{100}+j\frac{2}{10}\right) = \text{arctg}\left(\frac{22}{99}\right) \simeq 0,20 \ \text{rad} \qquad (1.21)$$

ossia 12 gradi circa.
Si desidera, adesso, imporre il valore delle pulsazioni nei punti di rottura, simmetriche rispetto a ω_n, in modo tale che l'errore in tali punti sia sempre dato dalla (1.21), posto $\angle\frac{\omega_n}{\alpha}$, $\alpha\omega_n$ l'intervallo da cercare:

$$\angle\left(1+\frac{2j\xi\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\Bigg|_{\omega=\frac{\omega_n}{\alpha}} = \text{arctg}\left(\frac{20}{99}\right) \implies \angle\left(1-\frac{1}{\alpha^2}+j\frac{2\xi}{\alpha}\right) = \text{arctg}\left(\frac{20}{99}\right)$$

$$\implies \frac{\frac{2\xi}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{20}{99} \implies \frac{2\xi\alpha}{\alpha^2-1} = \frac{20}{99} \simeq \frac{1}{5} \implies \alpha^2 - 10\xi\alpha - 1 = 0 \implies$$

$$\Rightarrow \alpha = 5\xi + \sqrt{25\xi^2+1} \qquad (1.22)$$

La PENDENZA di un tale diagramma asintotico è pari a:

$$\frac{\pi}{\log(\alpha\omega_n) - \log\left(\frac{\omega_n}{\alpha}\right)} = \frac{\pi}{2\log\alpha} = \frac{\pi}{2\log(\alpha(\xi))} \qquad (1.23)$$

In figura (1.10) è considerato il caso limite $\boxed{\xi = 1}$:
il termine trinomio è il quadrato di un binomio. Il diagramma asintotico che raccorda gli asintoti orizzontali su due decadi coincide con quello che raccorda gli asintoti orizzontali su un intervallo parametrizzato dall'indice $\alpha = 10$ dato dalla (1.22).
La pendenza di un tale diagramma asintotico nell'intorno di ω_n è, pari a $\pi/2$ rad/dec $\simeq 1{,}57$ rad/sec. La tangente in ω_n vale $\ln(10) \simeq 2{,}30$ con il parametro $\alpha \simeq 4{,}81$ definito dalla (1.20), numericamente uguale al valore (fino ad ora non indicizzato) del parametro che determina l'intervallo di raccordo per il diagramma asintotico tangente alla pulsazione di taglio di un binomio (1.12).

+ In figura (1.11) si riportano i grafici relativi allo smorzamento $\boxed{\xi = 0{,}5}$
Il diagramma asintotico tangente nella pulsazione di risonanza ha una pendenza di circa 4,61 rad/sec, equazione (1.18), e i punti di rottura sono individuati dal parametro $\alpha \simeq 2{,}19$, equazione (1.20), utilizzando il terzo tipo di diagramma asintotico, si ottiene una pendenza di circa 2,10 rad/dec, equazione (1.23), e i punti di rottura sono individuati dal parametro $\alpha \simeq 5{,}19$, equazione (1.22)

+ In figura 1.12 si riporta lo smorzamento $\boxed{\xi = 0,1}$.
Il diagramma asintotico tangente nella pulsazione di risonanza ha una pendenza di circa 23,03 rad / sec, equazione 1.18 e i punti di rottura sono individuati dal parametro $\alpha \simeq 1,17$, equazione 1.20; utilizzando il terzo tipo di diagramma asintotico si ottiene una pendenza di circa 7,52 rad / dec, equazione 1.23, i punti di rottura sono individuati dal parametro $\alpha \simeq 1,62$. equazione 1.22.

+ Per valori di $\boxed{\xi \simeq 0}$, la parte immaginaria del termine trinomio diventa trascurabile rispetto alla sua parte reale, cosicché la fase assume i valori di 0 e π radianti a seconda che la parte reale sia maggiore o minore di zero: al variare della pulsazione ω, il diagramma delle fasi assume l'andamento a gradino, come in figura 1.13.
In questo caso non servono approssimazioni per rappresentare il diagramma di Bode.
I criteri assunti per le approssimazioni con la retta tangente in ω_n e con l'intervallo parametrizzato dall'indice α definito in 1.22 sono comunque consistenti: in entrambi i casi l'intervallo collassa in un unico punto ($\alpha = 1$) e la pendenza risulta infinita

+ Quando $\boxed{\xi < 0}$ il diagramma dei moduli del termine trinomio non cambia, mentre quello delle fasi è simmetrico all'asse delle pulsazioni, in quanto non cambia il segno della parte immaginaria. In figura 1.14 si riporta l'esempio di $\xi = -0,1$.

4) GUADAGNO DI BODE = K

Produce nella risposta un'amplificazione uniforme al variare della pulsazione ω. Ciò si riflette nel diagramma dei moduli con una traslazione del grafico di una quantità pari a $20 \log |K|$, figura 1.15. Per questo motivo la retta a $|K|_{dB}$ è utilizzata come riferimento per le ordinate nei diagrammi di Bode delle risposte.
Si noti che tale riferimento coincide con la retta coordinata delle ascisse per un'amplificazione unitaria: $K = 1$.

1.15

Per quel che riguarda la fase, il guadagno di Bode non dà alcun
- contributo se K è positivo: $\angle K = 0$,
- nel caso in cui K è negativo, sfasa uniformemente il diagramma di π radianti: $\angle K = \pi$.
- In questo caso, sono i monomi e il segno del guadagno di Bode a determinare il riferimento per le ordinate nei diagrammi di Bode delle fasi.

Tale riferimento coincide con la retta coordinata delle ascisse in assenza di monomi e con un guadagno di Bode positivo, ovvero con una qualunque combinazione dei termini di cui sopra, che produca uno sfasamento uniforme pari a un multiplo di 2π radianti.

2) DIAGRAMMI POLARI

Il diagramma polare per un sistema lineare stazionario a tempo continuo è la rappresentazione parametrica nel piano complesso della funzione di trasferimento $W(s)$, calcolata in $s = j\omega$, al variare della pulsazione $\omega \in (-\infty, +\infty)$.

Tale diagramma è orientato nel senso crescente delle pulsazione. In particolare, la funzione di trasferimento può essere interpretata come quella funzione complessa ad argomento complesso che trasforma la curva $s = j\omega$, asse immaginario del piano di Gauss, nella curva $W(j\omega)$.

Riguardo alle proprietà di una generica trasformazione di variabile complessa, si riporta la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE: Una trasformazione di variabile complessa applicata ad una curva del piano di Gauss che non contiene (eventuali) singolarità della trasformazione è una curva chiusa.

Utilizzando questa proposizione è possibile fare le seguenti considerazioni:

- la funzione di trasferimento è un rapporto proprio di polinomi, per cui i suoi punti di singolarità sono costituite dai POLI;
- il diagramma polare è una curva chiusa del piano complesso se l'asse immaginario non passa per i poli della funzione di trasferimento, ossia se l'insieme dei poli di $W(s)$ non contiene numeri complessi puramente immaginari;
- il diagramma polare è una curva chiusa se il denominatore non presenta termini monomi o trinomi non smorzati ($\xi = 0$)

Per disegnare i termini polari, è consigliabile usare il seguente approccio:

1) Si utilizzano i diagrammi di Bode per tracciare la curva relativa alle pulsazioni positive: $\omega \in (0, +\infty)$
2) Poiché la funzione di trasferimento è a coefficienti reali, si ha che $W(-j\omega) = W(j\omega)^*$: per disegnare il diagramma polare in corrispondenza delle pulsazioni negative, si simmetrizza rispetto all'asse reale la curva tracciata per pulsazioni positive.

3) A meno di particolari specifiche, non è necessario disegnare il diagramma polare facendo particolare attenzione alla metrica adottata: ciò che conta nel disegno è indicare gli attraversamenti degli assi coordinati e i giri che il diagramma fa attorno ad alcuni punti del piano complesso.
A conferma di quanto precedentemente scritto, e per meglio evidenziare le intersezioni della curva polare con gli assi coordinati, nelle figure relative agli esercizi sui diagrammi polari, non si tiene conto della effettiva metrica.

Nel caso di poli puramente immaginari, il diagramma polare, così come è stato definito, non è chiuso.
Per poter avere un diagramma chiuso è necessario, dunque, modificare il percorso dell'asse immaginario.
Si sceglie come percorso alternativo il PERCORSO UNCINATO, che lascia le singolarità a sinistra (in figura 2.1 si suppone la presenza di 3 poli puramente immaginari, di cui uno nell'origine)

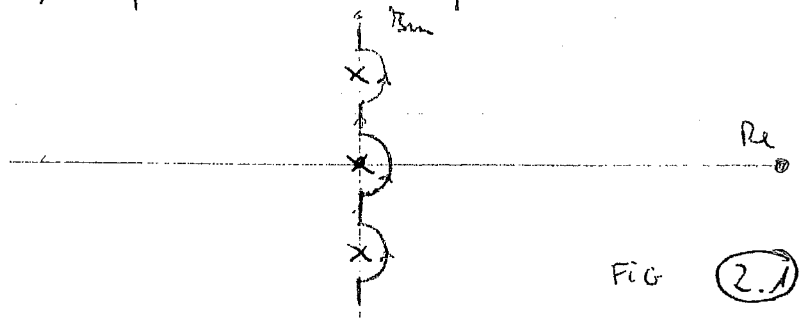

FIG 2.1

Tale percorso, in prossimità delle singolarità, si scosta da quello dell'asse immaginario su archi di curva di raggio infinitesimo, cosicché la chiusura del diagramma avviene su archi di curva di raggio grande a piacere.
Si parla, in questo caso di CHIUSURA ALL'INFINITO: essa deve essere percorsa in modo che si lasci la singolarità (l'infinito nel diagramma polare) a sinistra, per cui dovrà essere percorsa sempre in senso orario.