STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

1° CAPITOLO (43)
Sistemi a controreazione: il criterio di Nyquist

2° CAPITOLO (51)
Sistemi a tempo continuo: il criterio di Routh

1) SISTEMI A CONTROREAZIONE: IL CRITERIO DI NYQUIST

Si consideri il seguente sistema lineare stazionario a tempo continuo interconnesso:

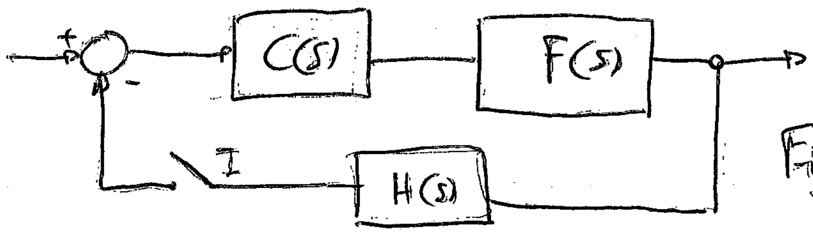


Fig 1.1

il sistema fisico, rappresentato dalla funzione di trasferimento $F(s)$, è sottoposto all'azione di controllo implementata dal regolatore $C(s)$, il quale processa la differenza tra un segnale di riferimento v e l'uscita del sistema y, opportunamente riportata in ingresso attraverso il dispositivo di trasduzione $H(s)$.
Un tale sistema interconnesso rappresenta uno schema di controllo a controreazione (FEEDBACK).

- Si parla di CATENA APERTA o SISTEMA A CICLO APERTO quando si suppone che l'interruttore I sia aperto, cosicché la funzione di trasferimento che esprime la relazione tra l'ingresso di riferimento e l'uscita misurata è

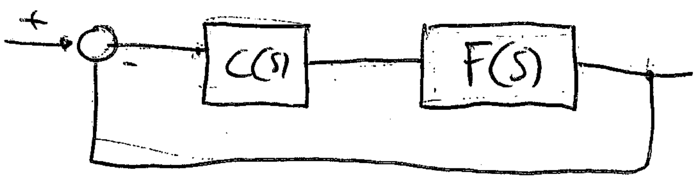
$$W_{AP}(s) = F(s)C(s) \qquad (1.1)$$

- Si parla di CATENA CHIUSA o SISTEMA A CICLO CHIUSO quando l'interruttore I è chiuso, per cui la funzione di trasferimento tra l'ingresso di riferimento e l'uscita misurata è

$$W_{CH}(s) = (I + F(s)C(s)H(s))^{-1} F(s)C(s) = $$
$$= (I + W_{AP}(s)H(s))^{-1} W_{AP}(s) \qquad (1.2)$$

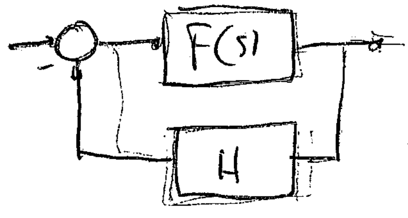
Noi tratteremo solo l'analisi della stabilità del sistema a ciclo chiuso. Supponiamo inoltre che la dinamica del trasduttore sia trascurabile rispetto a quella del dispositivo di controllo e dello stesso sistema fisico, cosicché la funzione di trasferimento $H(s)$ esprime un semplice legame diretto e non dipende dalla variabile di Laplace ($H(s) = H$: CONTROREAZIONE ISTANTANEA). Se

Se l'uscita è riportata identica in ingresso ($H = 1$), si parla di CONTROREAZIONE UNITARIA



L'analisi della stabilità di un generico sistema a controreazione istantanea può sempre ricondursi all'analisi della stabilità di un opportuno sistema a controreazione unitaria, in cui il blocco di trasduzione è riportato in catena aperta.

1)



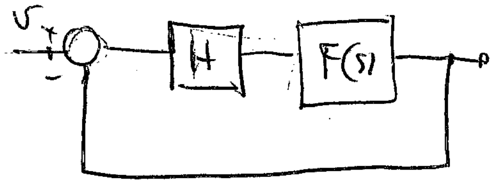
Le equazioni dinamiche di questo primo sistema sono:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A x(t) + B(v(t) - H y(t)) \\ y(t) = C x(t)\end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BHC)\, x(t) + B\, v(t) \qquad (1.3)$$

da cui il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso è

$$d_{CH}(\lambda) = \det(\lambda I - A + BHC). \qquad (1.4)$$

2)



Analogamente, le equazioni del secondo sistema sono

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A x(t) + BH(v(t) - y(t)) \\ y(t) = C x(t)\end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BHC)\, x(t) + BH\, v(t) \qquad (1.5)$$

da cui si ottiene lo stesso polinomio caratteristico per il sistema a ciclo chiuso.

L'uguaglianza dei polinomi caratteristici implica la medesima proprietà di stabilità.

Per questo motivo che faremo riferimento ai sistemi a controreazione unitaria, la cui FUNZIONE DI TRASFERIMENTO a ciclo chiuso, in accordo con l'equazione (1.2) opportunamente semplificata per sistemi SISO (Single Input Single Output) è data da:

$$W_{CH}(s) = \frac{W_{AP}(s)}{1 + W_{AP}(s)} \qquad (1.6)$$

La STABILITÀ di un sistema a controreazione unitaria può essere studiata scrivendo il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso (1.4) e calcolandone le radici, eventualmente utilizzando il criterio di Routh.
Un metodo alternativo è basato sul diagramma polare della funzione di trasferimento a ciclo aperto e prende il nome di CRITERIO DI NYQUIST

CRITERIO DI NYQUIST

Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo continuo SISO, posto in controreazione unitaria. Sia N il numero (algebrico) dei giri, contati positivi in senso antiorario, che il diagramma polare relativo alla funzione di trasferimento a ciclo aperto $W_{AP}(s)$ compie attorno al punto $-1+j0$ del semiasse reale negativo del polinomio complesso. Allora, il numero delle radici a parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso P_{CH} è dato dalla formula

$$P_{CH} = P_{AP} - N$$

dove P_{AP} è il numero delle radici a parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema a ciclo aperto.

OSSERVAZIONE 1.1: Un modo per contare i numeri di giri del diagramma polare (o di una generica curva orientata) attorno ad un punto consiste nel considerare le intersezioni della curva con una semiretta uscente dal punto. Le ~~interser~~ intersezioni sono positive se concordi con il verso antiorario di rotazione, altrimenti sono negative e la somma algebrica delle intersezioni restituisce il numero di giri. Ai fini del conteggio non ha importanza la direzione della semiretta uscente.

Nel caso in cui $W_{AP}(s)$ abbia poli sull'asse immaginario (parte reale nulla), il diagramma polare non è chiuso (sono presenti singolarità): utilizzando il percorso uncinato si ottengono una o più chiusure all'infinito, in modo da poter nuovamente calcolare il numero di giri attorno al punto $-1+j0$.
Qualora il diagramma polare passi per il punto $-1+j0$, vuol dire che il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso ha almeno una radice a parte reale nulla. In questi casi si deforma il diagramma polare in modo da lasciare $-1+j0$ a sinistra dell'intersezione del semiasse reale negativo, concordemente con il verso crescente delle pulsazioni.
Applicando il criterio di Nyquist in questo modo si ottiene il numero delle radici a parte reale positiva.
Quindi, si deforma il diagramma polare in modo da lasciare $-1+j0$ a destra dell'intersezione del semiasse reale negativo, concordemente con il verso crescente delle pulsazioni.
Applicando il criterio di Nyquist in questo modo si ottiene il numero delle radici a parte reale positiva o nulla.
Dalla loro differenza è possibile ricavare anche il numero delle radici del polinomio caratteristico a ciclo chiuso a parte reale nulla.

È interessante, ai fini della stabilità, valutare l'analisi al variare dei parametri che costituiscono la funzione di trasferimento. In particolare, è significativo il caso in cui il solo parametro che varia è il guadagno di Bode in catena aperta. Questa situazione rappresenta un sistema a controreazione, la cui azione di controllo (la funzione di trasferimento $C(s)$ in figura (1.2)) sia rappresentata dal solo guadagno K.
Analizzando il diagramma polare della funzione di trasferimento a catena aperta, all'aumentare del guadagno K la curva si "espande" mantenendo inalterata la forma, in quanto ~~solo~~ è solo l'ampiezza del raggio vettore che cresce uniformemente per ogni valore della fase.
Ragionando in altri termini, si può pensare di tenere fisso il diagramma (costruito, ad esempio, per $K=1$) riducendo la scala degli assi coordinati al crescere di K.

Un sistema a controreazione di questo tipo si dice a STABILITÀ REGOLARE se esiste un solo valore critico positivo del parametro K al crescere del quale si perde la stabilità (questa classe di sistemi la si riscontra nella realtà, in quanto è plausibile la perdita di stabilità al ~~cres~~ crescere del guadagno in catena aperta).
Un esempio significativo per questa classe di sistemi è costituito da un sistema già stabile in catena aperta ($P_{ap}=0$), con il diagramma polare che ha un solo attraversamento a $-\pi$: la stabilità è garantita se il punto $-1+j0$ è esterno al diagramma, ossia se il guadagno in catena aperta è così contenuto da far sì che in corrispondenza della pulsazione ω^* d'intersezione con il semiasse reale negativo, la funzione di trasferimento sia in modulo <1.
Sia $W_{ap}(s)=KF(s)$ allora

$$|W_{ap}(j\omega^*)|<1 \Rightarrow K<K^*=\frac{1}{|F(j\omega^*)|} \quad (1.8)$$

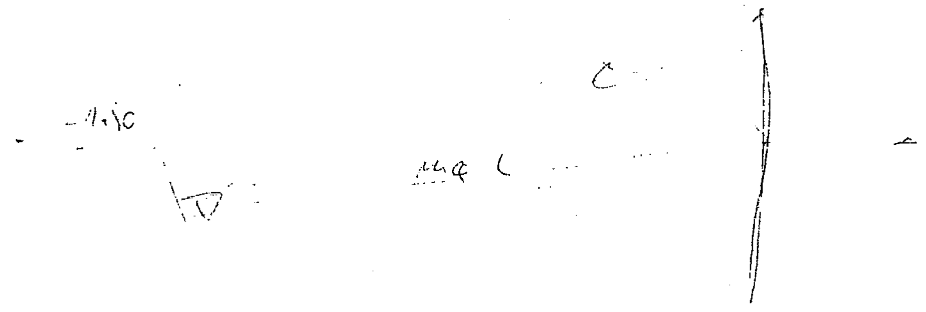
- Per i sistemi a stabilità regolare è possibile stabilire anche dei margini a garanzia della stabilità del sistema a ciclo chiuso in presenza di eventuali variazioni o incertezze negli altri parametri che costituiscono la funzione di trasferimento.
Si definisce MARGINE DI GUADAGNO la grandezza

$$m_g = \frac{1}{|W_{Ap}(j\omega^*)|} \quad \text{con} \quad \angle W_{Ap}(j\omega^*) = \pi \qquad (1.9)$$

Come si può notare, il margine di guadagno è >1 se, e solo se, il sistema a ciclo chiuso è stabile e al crescere di tale margine l'intersezione del diagramma polare con il semiasse reale negativo si allontana progressivamente dal punto critico $-1+j0$, cosicché la condizione di stabilità è robusta rispetto ad eventuali incertezze nel modello.
Per come è definito, il margine di guadagno può essere facilmente individuato anche sui diagrammi di Bode, fig 1.5

$$|m_g|_{dB} = 20 \log \frac{1}{|W_{Ap}(j\omega^*)|} = -|W_{Ap}(j\omega^*)|_{dB} \qquad (1.10)$$

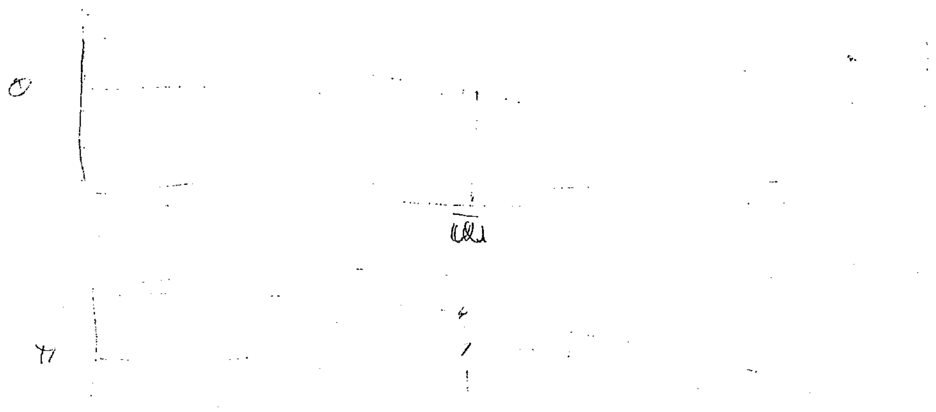
- Un modo alternativo per assegnare un margine di stabilità consiste nel considerare l'angolo individuato dal semiasse reale negativo e la semiretta uscente dall'origine e passante per il punto del diagramma polare di modulo unitario; fig. (1.6)



Tale angolo, detto MARGINE DI FASE, si descrive come segue

$$m_\varphi = \angle W(j\bar{\omega}) - \pi \qquad \text{con} \qquad |W(j\bar{\omega})| = 1 \qquad (1.11)$$

ed è positivo (a meno di multipli di 2π) se il sistema a ciclo chiuso è stabile.
Anche il margine di fase è facilmente individuabile nei diagrammi di Bode:



2) SISTEMI A TEMPO CONTINUO: IL CRITERIO DI ROUTH

Si consideri un sistema lineare stazionario a dimensione finita, la cui equazione di stato sia descritta dal seguente problema di Cauchy:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$x(t_0) = x_0, \qquad t \geq t_0 \qquad t, t_0 \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^p$ lo stato e l'ingresso del sistema.
Un punto $x_e \in \mathbb{R}^n$ è un PUNTO DI EQUILIBRIO del sistema se l'evoluzione libera a partire da quel punto coincide con il punto stesso, ossia se

$$x_0 = x_e \quad \Rightarrow \quad x_{LIB}(t) = x_e \qquad \forall t \geq t_0$$