TEORIA DEI SISTEMI

Def Processo = insieme delle evoluzioni temporali di un fenomeno descritte attraverso termini matematici

- artificiale (evoluzioni legate all'opera dell'uomo)
- naturali (" " alle leggi naturali)

Def Modello Matematico = insieme delle variabili temporali e delle relazioni matematiche che descrivono totalmente un processo

consente di:
- simulare un processo
- fare esperimenti non distruttivi
- predire il comportamento del processo
- progettare interventi per ottenere il comportamento voluto

Variabili temporali:
- di INGRESSO
- di STATO
- di USCITA

- **INGRESSO**

Caratterizzate dalla lettera u, sono variabili manipolabili, ovvero sono variabili (che definiscono funzioni vettoriali) che possono assumere valore qualsiasi relativamente ad un certo insieme U:

$\mathcal{U}$ = ~~spazio~~ insieme delle funzioni $u(t)$ aventi valore in $U \subseteq \mathbb{R}^p$ $\left(u(t) = \{u_1(t), \dots, u_p(t)\} \in U\right)$

quindi U è codominio di tutte le funzioni $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_p(t)\}$ ~~[illegible]~~ ed è ~~[illegible]~~ spazio vettoriale a p dimensioni

- **STATO**

Caratterizzate dalla lettera x, sono variabili che, ad un certo istante t, indicano 1) lo stato attuale del sistema 2) la storia passata. Possono essere utilizzate per conoscere lo stato futuro del sistema

X = spazio ~~[illegible]~~ delle f. di stato $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, con $x_1(t), \dots, x_n(t)$ variabili di stato. Dipendono solo dagli ingressi precedenti (ipotesi di causalità)

- **USCITA**

Caratterizzate dalla lettera y, riassumono la nostra conoscenza sullo stato del sistema in corrispondenza di un dato ingresso $u(t)$.

$\mathcal{Y}$ = ~~spazio~~ insieme delle funzioni $y(t)$ aventi valori $\{y_1(t), \dots, y_q(t)\}$ definiti in $Y \subseteq \mathbb{R}^q$

Riassumendo: → stato dipendente da 1) t 2) istante iniziale t_0 3) stato iniziale t_0 4) ingressi fino a t
→ uscita dipendente da 1) t 2) stato in t 3) ingressi in t

- $y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$ → EVOLUZIONE USCITA
- $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)})$ → EVOLUZIONE STATO

nota: $u_{[t_0,t)}$ nello stato perché dipende solo dagli ingressi fino a t (t escluso)

Def Si definisce SISTEMA la terna (X, φ, η) con

1) X = spazio di stato (o spazio astratto) = spazio vettoriale i cui elementi $x_1, \dots, x_n$ indicano lo stato in $t_1, \dots, t_n$

2) φ = FUNZIONE DI TRANSIZIONE DELLO STATO (ci dice come evolve il sistema)

$$\varphi : (T \times T) \times X \times \mathcal{U} \to X$$

$$(T \times T) = \{(t_0, t),\ t_0, t \in T \mid t \geq t_0\}$$ con T = insieme dei tempi = $\mathbb{N}$ se discreto, $\mathbb{R}$ se continuo

3) η = FUNZIONE DI TRASFORMAZIONE DI USCITA

$$\eta : T \times X \times U \to Y$$

che soddisfi le seguenti proprietà:

- CAUSALITÀ

$\varphi(t, t_0, x, u) = \varphi(t, t_0, x, u_{[t_0,t)})$ $\forall t, t_0 \in T, t \geq t_0$; $\forall x \in X$; $\forall u \in \mathcal{U}$

ovvero, posti $u = u_1$ e $u_{[t_0,t)} = u_2$, se $u_1(\tau) = u_2(\tau)$ $\forall \tau \in [t_0, t)$ ⇒ si verifica la proprietà

nb u = funz. $\in \mathcal{U}$; $u_{[t_0,t)}$ = f limitatamente all'intervallo o insieme di valori vettoriali

- CONSISTENZA

posto $t = t_0$ ⇒ $\underbrace{\varphi(t_0, t_0, x, u) = x}_{\text{uguali tra loro}}$ $\forall x \in X$; $\forall u \in \mathcal{U}$ ⇒ otteniamo lo stato iniziale

- SEPARAZIONE

$\varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0, u_{[t_0,t_1)}) = x_1, u_{[t_1,t)})$

$\forall t_0 \geq t_1 \geq t \in T$; $\forall u \in \mathcal{U}$; $\forall x_i \in X$ nb $x_0 = x(t_0)$; $x_1 = x(t_1)$

Def Un sistema si dice a tempo continuo se $T \subseteq \mathbb{R}$, discreto se $T \subseteq \mathbb{N}$.

Def Un sistema è a dimensione finita se ogni suo spazio è a dimensione finita (X, U, Y a dim. finita)

$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

Def Un sistema è lineare quando tutti i suoi spazi sono lineari e quando

1) φ lineare rispetto a $X \times \mathcal{U}$
2) η " " " $X \times U$

ovvero $\varphi(t, t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \varphi(t, t_0, x_1, u_1) + \alpha_2 \varphi(t, t_0, x_2, u_2)$

$\forall x_1, x_2 \in X; \ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}, \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Def Si definisce operatore di traslazione associato ad τ lo operatore Δ_τ |

$$\Delta_\tau f(x) = f(x - \tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \text{ o } \forall \tau \in \mathbb{Z}$$

Def Un sistema si dice STAZIONARIO se rimane invariato nel tempo quando $\forall$, applicando gli stessi ingressi $\mathcal{U}$ rispetto a stati iniziali e finali traslati di τ, si ottiene lo stesso stato finale e uscita finale

Sistema (X, φ, η) STAZIONARIO $\Rightarrow \begin{cases} \varphi(t+\tau, t_0+\tau, x, (\Delta_\tau u)_{[t_0+\tau, t+\tau)}) = \varphi(t, t_0, x, u_{[t_0,t)}) \\ \eta(t+\tau, x, u) = \eta(t, x, u) \end{cases} \quad \forall \tau$

$\Downarrow$ conseguenza

Scelto $\tau = -t_0$ si ha $\begin{cases} \varphi(t, t_0, x, u_{[t_0,t)}) = \varphi(t-t_0, 0, x, u_{[0, t-t_0)}) \\ \eta(t, x, u) = \eta(t-t_0, x, u) \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \varphi \text{ è indipendente da } t \text{ iniziale e finale} \Rightarrow \text{CONTA SOLO LA DURATA} \\ \eta \text{ è costante rispetto all'argomento tempo} \Rightarrow \text{NON DIPENDE DAL TEMPO } \end{cases}$ ~~può essere nuova~~

DIVENTANO

$\begin{cases} \varphi(t-t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) \\ \eta(x, u) \end{cases}$ → rimane lo stesso intervallo perché qualsiasi sia la trasformazione t e t_0 devono esistere

Se il sistema è stazionario e lineare, data la linearità di φ in $X \times \mathcal{U}$, allora $(x, u) = (x+0, u+0) =$ ~~[illegible]~~ $(x, 0) + (0, u) \Rightarrow \varphi(t-t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) =$

$$= \underbrace{\varphi(t-t_0, x_0, 0)} + \underbrace{\varphi(t-t_0, 0, u_{[t_0,t)})}$$

EVOLUZIONE LIBERA: φ dipende solo dallo stato iniziale x_0, rappresenta il sistema lasciato libero di evolversi

EVOLUZIONE FORZATA: il sistema posto in stato iniziale nullo con ingresso applicato

Def Un sistema (X, φ, η) si dice:

- **REGOLARE** se la funzione di transizione dello stato è la soluzione di un'equazione differenziale

ovvero $x(t) = \varphi(\dots)$ si ricava da una eq. differenziale del tipo $\dot{x} = f(t, x, u)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- **REGOLARE e STAZIONARIO** se è sia regolare che stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con φ stazionario $\Rightarrow \varphi(t - t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) = x($

- **REGOLARE e STAZIONARIO e LINEARE** se φ è soluzione di una eq differenziale lineare in $X \times U$

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t - t_0, x(t), u(t)) \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(x(t)) + f(u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Lemma: dato $\bar{x} \in X = \mathbb{R}^{n_1}$, $U = \mathbb{R}^p$, $L: \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ funzione lineare $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \underset{(n_2 \times n_1)}{A_L} : L(\bar{x}) = A_L \cdot \bar{x}$$

Ovvero: data una f. lineare L definita tra due spazi a dim. finita, per ogni vettore $\bar{x}$ alla quale L è applicata esisterà una matrice $A_L \mid L(\bar{x}) = A_L \bar{x}$

Dim: $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ = base canonica di $\mathbb{R}^{n_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow L(\bar{x}) = L\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ con $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ = componenti del vettore $\bar{x} \Rightarrow$ scalari.

$$L\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = L(\bar{x}_1 e_1 + \bar{x}_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \overset{\text{per la linearità di } L}{=} \bar{x}_1 L(e_1) + \bar{x}_2 L(e_2) + \dots + \bar{x}_n L(e_n)$$

essendo L una f. lineare $= \underbrace{\left[\underset{\text{colon. 1}}{L(e_1)} \; L(e_2) \dots \underset{\text{colon. n}}{L(e_n)} \right]}_{\text{MATRICE } A_L} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$

1) $T = \mathbb{R}$ CONTINUO: EQUAZIONI SISTEMI LINEARI STAZIONARI REGOLARI

$$\dot{x}(t) = f(x, u) = \underbrace{f(x, 0)}_{f_1(x)} + \underbrace{f(0, u)}_{f_2(x)}$$

$\left.\begin{array}{l} f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ f_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$ lineari $\Rightarrow$ per il lemma possono essere riscritte come

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x, 0) = Ax \\ f_2(x) = f(0, u) = Bu \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}}$$

FORMA IMPLICITA

A = matrice $n \times n$

B = " $n \times p$

(si estende il ragionamento a $\eta \Rightarrow y = \dots$)

2) $T = \mathbb{N} \Rightarrow$ DISCRETO

$\mathcal{U}_{[t_0,t)} = \mathcal{U}_{[t,t+1)} =$
$= \mathcal{U}_{\{t\}}$

$x(t) = \varphi(t - t_0, x_0, \mathcal{U}_{[t_0,t)})$

(t, t_0) arbitrari, con la condizione $t \geq t_0 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = t \\ t = t+1 \end{cases} \Rightarrow x(t+1) = (1, x(t), u(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ abbiamo espresso lo stato del sistema secondo lo stato e l'ingresso in t

$\Downarrow$

$\boxed{x(t+1) = f(x(t), u(t))} \Rightarrow$ data la linearità di f $(f(x,u) = f(x,0) + f(0,u)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}}$$

$\rightarrow$ stato del sistema

$\rightarrow$ ciò che misuriamo

FORMA IMPLICITA

SOLUZIONE SISTEMI LINEARI STAZIONARI REGOLARI

1) caso DISCRETO

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- A, B note
- $t \geq t_0$
- $x(t_0) = x_0$

SOLUZIONE: $\boxed{x(t) = A^{(t-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{(t-\tau-1)} Bu(\tau)}$

Dimostrazione soluzione per induzione:

- vera per $t = t_0 + 1$ infatti abbiamo $x(t_0+1) = A^{(t_0+1-t_0)}\underbrace{x_0}_{= x(t_0)} + \sum_{\tau=t_0}^{t_0+1-1} A^{(t_0+1-t_0-1)} \cdot Bu(t_0) =$
$= A \cdot x(t_0) + B \cdot u(t_0) \Rightarrow x(t_0+1) = Ax(t_0) + Bu(t_0)$
- supponiamola vera per $\hat{t}$, dimostriamola vera per $\hat{t}+1$

$$\begin{cases} x(\hat{t}+1) = Ax(\hat{t}) + Bu(\hat{t}) \\ y(\hat{t}) = Cx(\hat{t}) + Du(\hat{t}) \\ x(\hat{t}) = A^{(\hat{t}-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{\hat{t}-1} A^{(\hat{t}-\tau-1)} Bu(\tau) \end{cases}$$

$\Rightarrow x(\hat{t}+1) = A\left[A^{(\hat{t}-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{\hat{t}-1} A^{(\hat{t}-\tau-1)} Bu(\tau)\right] + Bu(\hat{t}) =$
$= A^{(\hat{t}+1-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{\hat{t}-1} A^{(\hat{t}-\tau)} Bu(\tau) + Bu(\hat{t}) =$
$= A^{(\hat{t}+1-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{\hat{t}} A^{(\hat{t}-\tau)} Bu(\tau) \Rightarrow$

posto $\hat{t}+1 = t$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = A^{(t-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{(t-1-\tau)} Bu(\tau)}$

inserito $Bu(\hat{t})$ nella sommatoria per $\tau = \hat{t}$ infatti avrei $A^{(\hat{t}-\hat{t})}Bu(\hat{t}) = A^0 \cdot Bu(\hat{t}) = Bu(\hat{t}) \Rightarrow Bu(\hat{t})$ lo posto dentro la Σ e aggiungo un addendo $\Rightarrow$ passo da $\hat{t}-1$ a $\hat{t}$

2) caso CONTINUO $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

a) caso scalare

$x(t) \in \mathbb{R}$ = scalare $\Rightarrow$ A = matrice $1\times1 \Rightarrow \det(A) = A = a$

- $u(t)$ = ingresso nullo

equazione differenziale: $\begin{cases} f'(x) = a f(x) \\ f(x_0) = f_0 \end{cases}$

il sistema diventa $\begin{cases} \dot{x}(t) = a\, x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \xRightarrow{SOL} \boxed{x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0}$

e infatti si ha ① $\dot{x}(t) = \underbrace{a \cdot e^{a(t-t_0)} \cdot x_0 = a\, x(t)}$ ② $x(t_0) = e^{a(t_0-t_0)} x_0 = x_0$

$e^{a(t-t_0)} x_0 = x(t)$

- $u(t) \neq 0 \Rightarrow$ ingresso non nullo $\Rightarrow u(t)$ = scalare

($x(t)$ scalare $\Rightarrow x(t) + B u(t)$ = scal; quindi $B u(t)$ = scalare, B = matrice quadrata, $u(t)$ = vettore $m\times1 \Rightarrow$ $B \cdot u = (m\times m)\cdot(m\times 1) = 1\times1 \Rightarrow B = 1\times1 \Rightarrow$ $\Rightarrow B = \det B = b$)

$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\, x(t) + b\, u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \xRightarrow{\text{SOL PARZIALE}} \boxed{x(t) = e^{a(t-t_0)} z(t)}$

DERIVIAMO

$a\big(\overbrace{e^{a(t-t_0)} z(t)}^{=x(t)}\big) + b\, u(t) = \dot{x}(t) = \underbrace{a\, e^{a(t-t_0)} z(t) + e^{a(t-t_0)} \dot{z}(t)}_{\dot{x}(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{a\, e^{a(t-t_0)} z(t)} + b\, u(t) = \cancel{a\, e^{a(t-t_0)} z(t)} + e^{a(t-t_0)} \dot{z}(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{z}(t) = b \cdot u(t) \cdot e^{-a(t-t_0)}$ ~~vogliamo~~ dobbiamo trovare $z(t)$

$z(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau-t_0)} b\, u(\tau)\, d\tau + \alpha$ $\rightarrow$ cost. di integrazione

sostituendo lo $z(t)$ trovato alla soluzione parziale abbiamo

$x(t) = e^{a(t-t_0)} \alpha + e^{a(t-t_0)} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau-t_0)} b\, u(\tau)\, d\tau =$

$= e^{a(t-t_0)} \alpha + \int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau-t_0-t+t_0)} b\, u(\tau)\, d\tau = e^{a(t-t_0)} \alpha + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau$

per soddisfare l'eq. differenziale dobbiamo soddisfare le condizioni iniziali $\Rightarrow \alpha = x_0 = x(t_0)$

SOLUZIONE GENERALE CASO SCALARE

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{a(t-t_0)} x_0}_{\text{Evoluzione LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau}_{\text{Evoluzione FORZATA}}}$$

nota matematica: DISUGUAGLIANZA DI BELLMAN-GRONWALL

Ipotesi: $g:[0,T)\to\mathbb{R}^+$, $0<T\le\infty$ funzione scalare con

1) $\forall\, t\in[0,T) \Rightarrow \sup_{\tau\in[0,t]} g(\tau)<\infty$
2) $\exists\, \alpha,\beta\ge 0 \in \mathbb{R} \;\Big|\; g(t)\le\alpha+\beta\int_0^t g(\tau)\,d\tau$

Tesi: $g(t)\le\alpha\cdot e^{\beta t}$, $t\in[0,T)$

Dimostrazione:

abbiamo $g(t)\le\alpha+\beta\int_0^t g(\tau)\,d\tau$ → la iteriamo

$$g(t)\le\alpha+\beta\int_0^t\left(\alpha+\beta\int_0^{t_1} g(t_2)\,dt_2\right)dt_1=$$

$$=\alpha+\alpha\cdot(\beta t)+\beta^2\int_0^t\int_0^{t_1} g(t_2)\,dt_2\,dt_1\le$$

$$\le\alpha+\alpha\cdot(\beta t)+\beta^2\cdot\int_0^t\int_0^{t_1}\left(\alpha+\beta\int_0^{t_2} g(t_3)\,dt_3\right)dt_2\,dt_1=$$

$$=\alpha+\alpha\,(\beta t)+\alpha\cdot\frac{(\beta t)^2}{2!}+\beta^3\int_0^t\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} g(t_3)\,dt_3\,dt_2\,dt_1\le\ldots\le$$

$$\le\alpha+\alpha\cdot(\beta t)+\alpha\frac{(\beta t)^2}{2!}+\ldots+\alpha\frac{(\beta t)^m}{m!}+\beta^{m+1}\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_m} g(t_{m+1})\,dt_{m+1}\,dt_m\ldots dt_1=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\alpha\cdot\frac{(\beta t)^i}{i!}+\beta^{m+1}\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_m} g(t_{m+1})\,dt_{m+1}\ldots dt_1$$

poiché

- $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\alpha\cdot\frac{(\beta t)^i}{i!}=\alpha\cdot e^{\beta t}$
- $\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_m} g(t_{m+1})\,dt_{m+1}\ldots dt_1\le\sup_{\tau\in[0,t]} g(\tau)\cdot\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}$

$\int_0^t\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_m} dt_{m+1}\ldots dt_1=\frac{t^m}{m!}$ (vedi prossime pagine)

$g(t_{m+1})\le\sup_{\tau\in[0,t_{m+1}]} g(\tau)$

↳ $\lim_{m\to\infty}\sup_{\tau\in[0,t]} g(\tau)\cdot\frac{t^m}{m!}=0$

⇓

$$\boxed{g(t)\le\alpha\cdot e^{\beta t}}$$

b) caso $\boxed{\text{vettoriale}}$

$x(t) \in \mathbb{R}^n \rightarrow x(t)$ è un vettore $\Rightarrow A: (n \times n)$

• $u(t) = 0 \Rightarrow$ ingresso nullo

il sistema diventa $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \underset{\text{sol}}{\Rightarrow} \boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot x(\tau) d\tau}, \quad t \geq t_0$

Alla soluzione appena trovata sostituiamo $t_1 = \tau$, con $t_0 < t_1 < t \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot x(t_1) dt_1$

$\hookrightarrow x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} A \cdot x(t_2) dt_2 \quad , \quad t_0 < t_2 < t_1 < t$

È possibile applicare ciò per la proprietà di separazione

diventa

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot \left[x_0 + \int_{t_0}^{t_1} A \cdot x(t_2) dt_2\right] dt_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t} A x_0 \, dt_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} A^2 x(t_2) dt_2 \, dt_1$$

con
$$\int_{t_0}^{t} A x_0 dt_1 = A \cdot x_0 \cdot (t - t_0)$$
$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} A^2 x(t_2) dt_2 \, dt_1 = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} A^2 \left[x_0 + \int_{t_0}^{t_2} A x(t_3) dt_3\right] dt_2 \, dt_1 =$$
$$= A^2 x_0 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} A^3 x(t_3) dt_3 \, dt_2 \, dt_1 \quad , \quad t_0 < t_3 < t_2 < t_1 < t$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot x(t_1) dt_1 =$$
$$= x_0 + A x_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} A^2 x(t_2) dt_2 \, dt_1 =$$
$$= x_0 + A x_0 (t - t_0) + A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} A^3 x(t_3) dt_3 \, dt_2 \, dt_1 =$$
$$= \ldots =$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} (t-t_0)^k x_0}_{= S_m} + \underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} \ldots \int_{t_0}^{t_m} A^{m+1} x(t_{m+1}) dt_{m+1} \ldots dt_1}_{= I_m}}$$

$x(t) = S_m + I_m$; $\lim_{m \to \infty} x(t) = \lim_{m \to \infty} (S_m + I_m) =$
- $\lim_{m \to \infty} S_m = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0$
- $\lim_{m \to \infty} I_m = ?$

Dobbiamo analizzare I_m: minoriamolo rispetto a qualcosa del quale possiamo conoscere il limite

$$I_m = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_m} A^{m+1}\cdot x(t_{m+1})\,dt_{m+1}\cdot dt_m\cdots dt_1$$

$$\Downarrow$$

$$\|I_m\| \le \int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t_m} \|A^{m+1}\,\underbrace{x(t_{m+1})}\|\,dt_{m+1}\cdots dt_1$$

$\hookrightarrow$ $x(t_{m+1}) = x_0 + \int_{t_0}^{t_{m+1}} A\,x(\sigma)\,d\sigma$

$$\Downarrow$$

$$\|x(t_{m+1})\| \le \underbrace{\|x_0\|}_{=\alpha} + \int_{t_0}^{t_{m+1}} \underbrace{\|A\|}_{=\beta}\cdot\|x(\sigma)\|\,d\sigma$$

$\alpha \xleftrightarrow[\text{GRONWALL}]{\text{LEMMA}} \beta$

$$\Downarrow$$

$$\|x(t_{m+1})\| \le \|x_0\|\cdot e^{\|A\|\cdot(t_{m+1}-t_0)}$$

SOSTITUENDO

$$\|I_m\| \le \int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t_m} \|A\|^{m+1}\cdot\|x_0\|\cdot e^{\|A\|\cdot(t_{m+1}-t)}\,dt_{m+1}\cdots dt_1 \le$$

$t_{m+1} \le t$

$$\le \|A\|^{m+1}\cdot\|x_0\|\cdot e^{\|A\|\cdot(t-t_0)}\cdot\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_m} dt_{m+1}\cdot dt_m\cdots dt_1$$

dove $\bar{S}_m$ indica $\|A\|^{m+1}\cdot e^{\|A\|\cdot(t-t_0)}$ e J_m indica $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_m} dt_{m+1}\cdot dt_m\cdots dt_1$

abbiamo quindi $\|I_m\| \le \|x_0\|\,\bar{S}_m\cdot J_m$

Adesso dimostriamo che $J_m = \dfrac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}$

- $m=1 \Rightarrow \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} dt_2\,dt_1 = \int_{t_0}^{t}(t_1-t_0)\,dt_1 = \dfrac{(t-t_0)^2}{2} \Rightarrow$ vera
- supposta vera per $\bar{m}$, dimostriamola per $\bar{m}+1$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{\bar{m}}}\int_{t_0}^{t_{\bar{m}+1}} dt_{\bar{m}+2}\cdots dt_1 = \int_{t_0}^{t}\frac{(t_1-t_0)^{\bar{m}+1}}{(\bar{m}+1)!}\,dt_1 = \frac{1}{(\bar{m}+1)!}\left[\frac{(t_1-t_0)^{\bar{m}+2}}{(\bar{m}+2)}\right]_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{(t-t_0)^{\bar{m}+2}}{(\bar{m}+2)!} \rightarrow \text{vera} \Longrightarrow \boxed{J_m = \frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)}}$$

$\hookrightarrow$ $\|I_m\| \le x_0\,\bar{S}_m\,J_m$; $\lim_{m\to\infty} J_m = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\|I_m\| = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\lim_{m\to\infty} S_m}_{=e^{A(t-t_0)}\cdot x_0} + \lim_{m\to\infty} I_m \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\,e^{A(t-t_0)}}$$

CASO VETTORIALE INGRESSO NULLO

• $u(t) \neq \vec{0}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \xRightarrow[\text{PARZIALE}]{\text{SOL.}} \boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)} z(t)}$$

$\Downarrow$ DERIVIAMO

$$A \cdot \overbrace{\left(e^{A(t-t_0)} z(t)\right)}^{=x(t)} + B u(t) = \dot{x}(t) = A e^{A(t-t_0)} z(t) + e^{A(t-t_0)} \dot{z}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = B \cdot u(t) \cdot e^{-A(t-t_0)}$$

$$z(t) = \overset{(=\alpha)}{z(t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau - t_0)} B \cdot u(\tau) \, d\tau$$

$\Downarrow$ UTILIZZANDO LA SOL. PARZIALE

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \, d\tau$$

tenendo conto delle condizioni iniziali ($\Rightarrow z(t_0) = x_0$)

SOLUZIONE GENERALE caso VETTORIALE

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x_0}_{e^{A(t-t_0)} \cdot x_0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \, d\tau}_{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}}$$

$\downarrow$ Evoluzione LIBERA $\qquad$ $\downarrow$ Evoluzione FORZATA

FUNZIONE DI TRANSIZIONE

Def Si definisce funzione di transizione dello stato la funzione $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u)$ avente le seguenti proprietà

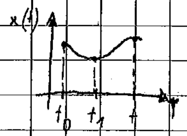
① Causalità

$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)})$ con $\begin{cases} u = \text{funzione} \\ u_{[t_0,t)} = \text{valori assunti da } u \text{ in quell'intervallo} \end{cases}$ $\forall u \in \mathcal{U}$

② Consistenza

$\tilde{x} = \varphi(t, t, \tilde{x}, u_{[t,t)}) = \varphi(t, t, \tilde{x}, 0)$ $\forall \tilde{x} \in X$ ovvero posto $t_0 = t$ ottengo il generico stato

③ Separazione



$$\begin{cases} x(t_1) = \varphi(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1)}) \\ x(t) = \varphi(t, t_1, x(t_1), u_{[t_1,t)}) \end{cases} \Rightarrow x(t) = \varphi(t, t_1, \overbrace{\varphi(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1)})}^{=x(t_1)}, u_{[t_1,t)})$$

$\forall$:
- $u \in \mathcal{U}$
- $t_1 \in [t_0, t]$
- $x(t_0) \in X$

nb TUTTE e 3 le proprietà devono essere soddisfatte da φ affinché possa essere definita funzione di transizione

φ inoltre può essere
- regolare se φ è la soluzione di una equazione differenziale
- lineare se X, $\mathcal{U}$ lineari e $X \times \mathcal{U}$ lineare
  - nb: f lineare $\Rightarrow$ 1) $f(0) = 0$ 2) $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$
- stazionaria se, $\forall \Delta_r / \Delta_r u \in \mathcal{U}$, si ha

$$\varphi(t, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t)}) = \varphi(t-r, t_0-r, \tilde{x}, \Delta_r u_{[t_0-r, t-r)}) \quad \forall r, \tilde{x}, u$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta_r = \Delta_{t_0} \rightarrow \varphi(t, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t)}) = \varphi(t-t_0, 0, \tilde{x}, \Delta_{t_0} u_{[0,t-t_0)}) = \varphi(t-t_0, x(t_0), u_{[0,t-t_0)})$$

Analizziamo i sistemi lineari: $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)}) = \underbrace{\varphi(t, t_0, x(t_0), 0)}_{\text{EV. LIBERA}} + \underbrace{\varphi(t, t_0, 0, u_{[t_0,t)})}_{\text{EV. FORZATA}}$

• EVOLUZIONE LIBERA (Hp: S lineare)

$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^n \cdot x_i(t)$ con $\{\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots, \varepsilon_n^n\}$ = base di $\mathbb{C}^n$, $x(t) \in \mathbb{C}^n$

$$\Downarrow$$

$x_{lib}(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), 0) = \varphi(t, t_0, \sum_{i=1}^{n} x_i(t_0) \cdot \varepsilon_i^n, 0) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i(t_0) \cdot \varphi(t, t_0, \varepsilon_i^n, 0) =$

$= \begin{bmatrix} \phi_1(t,t_0) & \phi_2(t,t_0) & \dots & \phi_n(t,t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x_{lib}(t) = \overset{n \times n}{\phi}(t, t_0) \cdot \overset{n \times 1}{x}(t_0)}$

con $\phi_k(t,t_0) = \varphi(t, t_0, \varepsilon_k^n, 0) \Rightarrow$ vettore colonna

FORMA ESPLICITA

con $\phi(t, t_0)$ = matrice di transizione dello stato

TUTTE le proprietà di φ sono anche proprietà di $\underline{\phi}$

- non stazionario

1) CONSISTENZA: $\tilde{x} = \underline{\phi}(t,t)\cdot\tilde{x} \quad \forall \tilde{x}, t$

2) SEPARAZIONE: $x(t) = \underline{\phi}(t,t_0)\cdot x(t_0) = \underline{\phi}(t,t_1)\cdot x(t_1) = \underline{\phi}(t,t_1)\,\underline{\phi}(t_1,t_0)\,x(t_0) \quad \forall t_0 \le t_1 \le t$
(detta anche semigruppo)

- stazionario $\left(\Rightarrow x_\ell(t) = \underline{\phi}(t,t_0)\,x(t_0) = \underline{\phi}(t+\Delta, t_0+\Delta)\cdot x(t_0) \Rightarrow \Delta = -t_0 \Rightarrow x_\ell(t) = \underline{\phi}(t-t_0)\cdot x(t_0)\right)$

1) CONSISTENZA: $\tilde{x} = \underline{\phi}(t-t)\,\tilde{x} \Rightarrow \underline{\phi}(0) = \underline{I}$

2) SEPARAZIONE: $\underline{\phi}(t-t_0) = \underline{\phi}(t-t_1)\cdot\underline{\phi}(t_1-t_0) \quad \forall\ t_0 \le t_1 \le t$
(semigruppo)

$\hookrightarrow \underline{\phi}(\tau_1+\tau_2) = \underline{\phi}(\tau_1)\,\underline{\phi}(\tau_2)$

Possiamo ora studiare il passaggio dalla forma esplicita a quella implicita

(a) continuo

1) non stazionario

$\underline{\phi}(t,t_0)$ deve essere derivabile da destra essendo $t \ge t_0 \Rightarrow$ rapporto incrementale

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\underline{\phi}(t+\varepsilon,t_0) - \underline{\phi}(t,t_0)}{\varepsilon} \overset{\text{semigruppo}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\underline{\phi}(t+\varepsilon,t)\cdot\underline{\phi}(t,t_0) - \underline{\phi}(t,t_0)}{\varepsilon} = \underbrace{\left\{\frac{\underline{\phi}(t+\varepsilon,t) - \underline{\phi}(t,t)}{\varepsilon}\right\}}_{\lim_{\varepsilon\to 0^+}} \cdot \underline{\phi}(t,t_0)$$

$$= A(t)\cdot\underline{\phi}(t,t_0)$$

$$\boxed{\left.\frac{d^+\underline{\phi}(t,\tau)}{dt}\right|_{\tau=t} = A(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\,\underline{\phi}(t,t_0)}{dt} = A(t)\cdot\underline{\phi}(t,t_0)}$$

$\hookrightarrow x(t) = \underline{\phi}(t,t_0)\cdot x(t_0) \Rightarrow \dot{x}(t) = A(t)\,\underline{\phi}(t,t_0)\cdot x(t_0) \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t)}$

FORMA IMPLICITA

2) stazionario

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\underline{\phi}(t+\varepsilon-t_0) - \underline{\phi}(t-t_0)}{\varepsilon} = \left\{\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\underline{\phi}(\varepsilon) - \underline{I}}{\varepsilon}\right\} \underline{\phi}(t-t_0) = A\cdot\underline{\phi}(t-t_0);$$

$$\hookrightarrow \boxed{\left.\frac{d^+\underline{\phi}(t)}{dt}\right|_{t=0} = A}$$

$x(t) = \underline{\phi}(t-t_0)\cdot x(t_0)$

$\Downarrow$

$\dot{x}(t) = A\cdot\underline{\phi}(t-t_0)\cdot x(t_0) \Rightarrow$

FORMA IMPLICITA

$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = A\cdot x(t)}$

$$\boxed{\frac{d^+\underline{\phi}(t)}{dt} = A\cdot\underline{\phi}(t-t_0)}$$

b) discreto

1) non stazionario

$x(t) = \Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) \Rightarrow x(t+1) = \underbrace{\Phi(t+1,t)}_{\to = A(t)}\cdot x(t) \Rightarrow \left\{ x(t+1) = A(t)\cdot x(t) \right.$ FORMA IMPLICITA

$\boxed{A(t) = \Phi(t+1,t)}$

nb nel discreto conoscere l'andamento del sistema significa conoscerne il passo ⇒

$x(t_0+1) = A(t_0)\cdot x(t_0)$

$x(t_0+2) = A(t_0+1)\cdot x(t_0+1) = A(t_0+1)\cdot A(t_0)\cdot x(t_0)$

$\vdots$

$x(t_0+K) = A(t)\cdot A(t-1)\cdot \ldots \cdot A(t_0)\cdot x(t_0)$

$k = t-t_0+1$

2) stazionario

$x(t) = \Phi(t-t_0)\cdot x(t_0) \Rightarrow x(t+1) = \Phi(t+1-t)\cdot x(t) \Rightarrow x(t+1) = \underbrace{\Phi(1)}_{=A}\cdot x(t) \Rightarrow \left\{ x(t+1) = A\, x(t) \right.$ FORMA IMPLICITA

$\Rightarrow \boxed{A = \Phi(1)}$

passo del sistema:

$x(t_0+1) = A\cdot x(t_0)$

$x(t_0+2) = A\cdot x(t_0+1) = A^2\cdot x(t_0)$

$\vdots$

$x(t_0+k) = x(t) = A^{t-t_0}\cdot x(t_0)$

$k = t-t_0$

Riassumendo

$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)})$ con φ
- causalità: $u \to u_{[t_0,t)}$
- consistenza: $\varphi(t,t) \to x$
- separazione: $\varphi(t,t_1) = \varphi(t,x_1)$

se φ lineare

$\varphi = \underbrace{\varphi(t,t_0,x(t_0),0)}_{ev.\ lib} + \underbrace{\varphi(t,t_0,0,u_{[t_0,t)})}_{ev.\ forzata}$

ESPL: $\begin{cases} x_l(t) = \Phi(t,t_0)\, x(t_0) & \text{non staz} \to ns \\ x_l(t) = \Phi(t-t_0)\cdot x(t_0) & \text{staz} \to s \end{cases}$ con $\Phi(t,t_0)$
- consistenza: $\Phi(t,t) = I \quad (\Phi(0) = I)$
- separazione: $\Phi(t,t_0) = \Phi(t,t_1)\,\Phi(t_1,t_0)$

IMPL CONT: $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) & ns \\ \dot{x}(t) = A\cdot x(t) & s \end{cases}$ con
- $A(t) = \left.\dfrac{d\,\Phi(t,\tau)}{dt}\right|_{\tau=t}$
- $A = \left.\dfrac{d\Phi(t)}{dt}\right|_{t=0}$

IMPL DISCR: $\begin{cases} x(t+1) = A(t)\cdot x(t) & ns \\ x(t+1) = A\cdot x(t) & s \end{cases}$ con
- $A(t) = \Phi(t+1,t)$
- $A = \Phi(1)$

• EVOLUZIONE FORZATA (Hp: S lineare)

a) discreto

$\varphi(t, t_0, 0, u_{[t_0,t)})$, $u \in \mathbb{C}^p$

Dato $\begin{cases} \delta_{(\tau)} = \text{impulso discreto centrato in } \tau \\ \delta_{(\tau)}(t) = \delta(t-\tau) = \delta(\tau - t) \text{ impulso traslato di } \tau \end{cases}$

abbiamo $u = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \delta_{(\tau)} \Rightarrow \boxed{u_{[t_0,t)} = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} u(\tau)\delta_{(\tau)}}$

$x_f(t) = \varphi(t, t_0, 0, u_{[t_0,t)}) = \varphi\left(t, t_0, 0, \sum_{\tau=t_0}^{t-1} u(\tau)\delta_{(\tau)}\right) =$ essendo $u(t) \in \mathbb{C}^p \Rightarrow u(t) = u_1(t)\,\varepsilon_1^p + \ldots + u_p(t)\,\varepsilon_p^p$ con $\{\varepsilon_1^p, \ldots, \varepsilon_p^p\}$ base di $\mathbb{C}^p$

$= \varphi\left(t, t_0, 0, \sum_{i=1}^{p}\sum_{\tau=t_0}^{t-1} u_i(\tau)\,\varepsilon_i^p\,\delta_{(\tau)}\right) \overset{\text{linearità}}{=}$

$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{\tau=t_0}^{t-1} u_i(\tau) \cdot \underbrace{\varphi(t, t_0, 0, \varepsilon_i^p\delta_{(\tau)})}_{\text{vettore colonna della matrice di forzamento } H} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{for}(t) = H(t, t_0, \tau) \cdot u(\tau) = \left[\,H_1(t,t_0,\tau)\;\; H_2(t,t_0,\tau)\;\ldots\; H_p(t,t_0,\tau)\,\right] \cdot \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ \vdots \\ u_p(\tau) \end{bmatrix}$

$H_i(t,t_0,\tau) = \varphi_i(t, t_0, 0, \varepsilon_i^p\delta_{(\tau)})$

$\Downarrow$ $\quad n \times p \qquad p \times 1$

NB $\boxed{x_{for}(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t,\tau) \cdot u(\tau)}$ nb t_0 si può omettere poiché ~~ [illegible] ~~ H ha in sé la proprietà di separazione di φ

$\boxed{x_{for}(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t-\tau)\, u(\tau)}$

b) continuo

Dato $\delta_{(\tau)}$ = impulso centrato in τ → delta di Dirac, si ha che

$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \delta(\bar{t} - \tau)\, d\tau = u(\bar{t}) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,\delta_{(\tau)}\,d\tau = u_{[t_0,t)}$

$\Downarrow$

$x_f(t) = \varphi\left(t, t_0, 0, \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,\delta_{(\tau)}\,d\tau\right) \overset{L}{=} \int_{t_0}^{t} \varphi(t, t_0, 0, u(\tau)\,\delta_{(\tau)})\,d\tau =$

essendo $u \in \mathbb{C}^p \Rightarrow u(\tau) = u_1(\tau)\,\varepsilon_1^p + \ldots + u_p(\tau)\,\varepsilon_p^p$ con $\{\varepsilon_1^p, \ldots, \varepsilon_p^p\}$ base di $\mathbb{C}^p \Rightarrow$

$\Rightarrow x_f(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi\left(t, t_0, 0, \sum_{i=1}^{p} u_i(\tau)\,\varepsilon_i^p\,\delta_{(\tau)}\right) d\tau \overset{L}{=} \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{p} u_i(\tau) \cdot \underbrace{\varphi(t, t_0, 0, \varepsilon_i^p\,\delta_{(\tau)})}_{\text{vettore colonna della matrice di forzamento } H} d\tau =$

$= \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

quindi

$$\left\{ x_{lib}(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right\} \quad MS$$

con $H(t,\tau)$ = MATRICE DI FORZAMENTO

$$\left\{ x_{lib}(t) = \int_{t_0}^{t} H(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right\} \quad S$$

Proprietà di H: SEPARAZIONE

discreto Hp: $x(t_0)=0$

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) =$$

$$= \Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t,\tau)u(\tau) =$$

$$= \Phi(t,t_1)\cdot \left[\Phi(t_1,t_0)\cdot x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} H(t_1,\tau)u(\tau)\right] + \sum_{\tau=t_1}^{t-1} H(t,\tau)u(\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t,\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Phi(t,t_1)H(t_1,\tau)u(\tau) + \sum_{\tau=t_1}^{t-1} H(t,\tau)u(\tau) + \overbrace{\Phi(t,t_1)\cdot\Phi(t_1,t_0)x(t_0) - \Phi(t,t_0)x(t_0)}^{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} H(t,\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \Phi(t,t_1)H(t_1,\tau)u(\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ H(t,\tau) = \Phi(t,t_1)\, H(t_1,\tau) \right\} \quad MS$$

$$\forall\, t_0 \le t_1 \le t, \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

$$\left\{ H(t-\tau) = \Phi(t-t_1)\cdot H(t_1-\tau) \right\} \quad S$$

continuo Hp: $x(t_0)=0$

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = \Phi(t,t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \Phi(t,t_1)\left[\Phi(t_1,t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1,\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right] + \int_{t_1}^{t} H(t,\tau)u(\tau)\, d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,t_1)\, H(t_1,\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t_1} H(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,t_1)\, H(t_1,\tau)u(\tau)\, d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ H(t,\tau) = \Phi(t,t_1)\, H(t_1,\tau) \right\} \quad MS$$

$$\forall\, t_0 \le t_1 \le t, \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

$$\left\{ H(t-\tau) = \Phi(t-t_1)\, H(t_1-\tau) \right\} \quad S$$

DALLA FORMA IMPLICITA A QUELLA ESPLICITA

ⓐ discreto

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t,\tau)\,u(\tau) \Rightarrow \text{posto } \begin{array}{l} \cdot\, t_0 = t \\ \cdot\, t = t+1 \end{array} \left(\begin{array}{l}\text{transizione} \\ \text{ad un passo}\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\text{n.i.} \Rightarrow \quad x(t+1) = \Phi(t+1,t)\,x(t) + H(t+1,t)\,u(t) \rightarrow \{A(t) = \Phi(t+1,t) \;;\; B(t) = H(t+1,t)\}$$

$$\text{i.} \Rightarrow \quad x(t+1) = \Phi(1)\,x(t) + H(1)\,u(t) \longrightarrow \{A = \Phi(1) \;;\; B = H(1)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t) & \text{i.} \\ x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) & \text{n.i.} \end{cases}$$

ⓑ continuo

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\dot x(t) = A(t)\cdot x(t) + \underbrace{\frac{d\left(\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau\right)}{dt}}$$

1) $\dfrac{d\,H(t,\tau)}{dt} = \dfrac{d\left(\Phi(t,t_1)\,H(t_1,\tau)\right)}{dt} = \dfrac{d\left(\Phi(t,t_1)\right)}{dt}\cdot H(t_1,\tau) = A(t)\cdot\Phi(t,t_1)\cdot H(t_1,\tau) = A(t)\cdot H(t,\tau)$

2) $g(t) = \displaystyle\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,\tau)\,d\tau \Rightarrow \dfrac{dg}{dt} = \displaystyle\int_{a(t)}^{b(t)} \dfrac{d}{dt} f(t,\tau)\,d\tau + \dfrac{db}{dt} f(t,b(t)) - \dfrac{da}{dt} f(t,a(t))$

in questo caso $a(t) = t_0 \Rightarrow$ non dipende da t; $b(t) = t \Rightarrow$ dipende da t

$$\Downarrow$$

$$\dot x(t) = A(t)\cdot x(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\cdot H(t,\tau)\,d\tau + H(t,t)\,u(t) =$$

$$= A(t)\underbrace{\left[\Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,d\tau\right]}_{=x(t)} + \underbrace{H(t,t)}_{=B(t)}\,u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{n.i.} \quad \{\dot x(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\}$$

$$\Rightarrow \text{i.} \quad \{\dot x(t) = A\cdot x(t) + B\,u(t)\}$$

con:
- $B(t) = H(t,t) \Rightarrow H(t,\tau) = \Phi(t,\tau)\,B(\tau)$
- $B = H(0) \Rightarrow H(t-\tau) = \Phi(t-\tau)\cdot B$

e con:
- $A(t) = \left.\dfrac{d\Phi(t,\tau)}{dt}\right|_{t=\tau}$
- $A = \left.\dfrac{d\Phi(t)}{dt}\right|_{t=0}$

ANALISI DELL'USCITA: W e IMPLICITA-ESPLICITA

ⓐ discreto

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = C\cdot x(t) + D\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \boxed{y(t) = \Psi(t,t_0)\,x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t} W(t,\tau)\,u(\tau)}$$ FORMA ESPLICITA

con:

- $\Psi(t,t_0) = C(t)\cdot\Phi(t,t_0)$
- $\underline{W(t,\tau)} = \begin{cases} C(\tau)H(t,\tau) & , t \neq \tau \\ D(\tau) & , t = \tau \end{cases} \rightarrow D(\tau) = W(\tau,\tau)$

$\downarrow$

MATRICE DELLE RISPOSTE IMPULSIVE (IN USCITA)

nb se ridefinisco H, ponendo $H(\tau,\tau) := 0$ posso ridefinire $W(t,\tau)$:

$$\boxed{W(t,\tau) = C(t)\cdot H(t,\tau) + D(t)\,\delta(t-\tau)}$$ con

- $H(\tau,\tau) = 0$ → nb solo nel discreto
- $\delta(t-\tau)$ delta di Kroneker

ⓑ continuo

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = C(t)\cdot x(t) + D(t)\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow y(t) = \Psi(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

con

- $\Psi(t,t_0) = C(t)\cdot\Phi(t,t_0)$
- $\boxed{W(t,\tau) = C(t)\cdot H(t,\tau) + D(t)\cdot\delta(t-\tau)}$

NOTE FINALI STAZIONARIO

DISCRETO

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

- $A = \Phi(1)$ • $B = H(1)$
- $C = \Psi(0)$ • $D = W(0)$
- $\Phi(t) = A^t$ • $H(t) = A^{t-1}\cdot B$
- $\Psi(t) = C\,A^t$ • $W(t) = C\cdot A^{t-1}\cdot B,\ t>0;\ = D,\ t=0$

CONTINUO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\cdot x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

- $A = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=0}$ • $B = H(0)$
- $C = \Psi(0)$

RIASSUMENDO

Funz. TRANSIZIONE $\varphi(t, t_0, x(t_0), u) = f$ con proprietà
- causalità $\to u_{[t_0, t)}$
- consistenza $\to \varphi(t,t)$
- separazione $\to x(t_1)$

φ anche regolare (sol eq diff), stazionario (conta Δt), lineare ($x, u, x \times u$ lin)

$\Downarrow$

$\varphi =$ ev lib + ev forzata

- **EV LIBERA**

$$\varphi(t, t_0, x(t_0), 0) = \varphi\left(t, t_0, \sum_{i=1}^{n} x_i(t_0) \varepsilon_i^n, 0\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \varphi(t, t_0, \varepsilon_i^n, 0) = \underbrace{\underline{\Phi}(t, t_0)}_{\text{MAT. TRANSIZIONE STATO}} \cdot x(t_0)$$

- Proprietà Φ:
1) consistenza $\tilde{x} = \Phi(t,t)\tilde{x}$
2) separazione $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$

- impl - espl

$$\text{cont} \begin{cases} x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) \Rightarrow \dot{x}(t) = \dfrac{d\Phi(t,t_0)}{dt} \cdot x(t_0) = A(t)\Phi(t,t_0) x(t_0) = A(t)\Phi x(t) \end{cases}$$

$$\text{discr} \begin{cases} x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x(t_0) \left\langle {}^{t_0 = t}_{t = t+1} \right. \quad x(t+1) = \Phi(t+1, t) \cdot x(t) = A(t) x(t) \end{cases}$$

- **EV FORZATA**

discreto: $u_{[t_0, t)} = \sum_{\tau = t_0}^{t-1} u(\tau) \delta(\tau)$; $u(t) = u_1(t) \cdot \varepsilon_1^p + \dots + u_p(t) \cdot \varepsilon_p^p \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi\left(t, t_0, 0, \sum_{i=1}^{p} \sum_{\tau = t_0}^{t-1} u_i(\tau) \varepsilon_i^p \delta(\tau)\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\tau=t_0}^{t-1} u_i(\tau) \varphi(t, t_0, 0, \varepsilon_i^p \delta(\tau)) = \sum_{\tau = t_0}^{t-1} \underbrace{H(t, \tau)}_{\text{MAT. FORZAMENTO}} u(\tau)$$

continuo: $u_{[t_0, t)} = \int_{t_0}^{t} u(\tau) \delta(\tau) d\tau$; $u(t) = \sum_{i=1}^{p} u_i(t) \cdot \varepsilon_i^p \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi\left(t, t_0, 0, \sum_{i=1}^{p} \int_{t_0}^{t} u_i(\tau) \varepsilon_i^p \delta(\tau) d\tau\right) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{p} u_i(\tau) \varphi(t, t_0, 0, \varepsilon_i^p \delta(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^{t} H(t, \tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

Prop H: separazione

$$x(t_0) = 0 \Rightarrow x(t) = \underbrace{\Phi(t, t_0) x(t_0)}_{=0} + \sum_{\tau = t_0}^{t-1} H(t, \tau) u(\tau) = \Phi(t, t_1) \cdot \left(\overbrace{\varphi(t_1, t_0, x(t_0), 0)}^{=0} + \varphi(t_1, t_0, 0, u_{[t_0, t_1)})\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(t, \tau) = \Phi(t, t_1) H(t_1, \tau)$$

- impl - espl

$$\text{dis} \begin{cases} x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \sum_{\tau = t_0}^{t-1} H(t, \tau) u(\tau) \left\langle {}^{t_0 = t}_{t = t+1} \right. \quad x(t+1) = \Phi(t+1, t) x(t) + \overbrace{H(t+1, t)} u(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t) \end{cases}$$

$$\text{cont} \begin{cases} x(t) = x_\ell + x_f \Rightarrow \dot{x}(t) = A(t) x(t) + \underbrace{\dfrac{d\,\cdots}{dt}} \Rightarrow \dfrac{d\,H(t,\tau)}{dt} = A(t) H(t, \tau) \dots = A(t) x(t) + \underset{= H(t,t)}{B} u(t) \end{cases}$$

USCITA

$$y(t) = C \cdot x(t) + D u(t) = \Psi(t,t_0) x(t_0) + \sum_{\tau = t_0}^{t} W(t,\tau) u(\tau) \quad \begin{cases} \Psi(t,t_0) = C(t) \cdot \Phi(t,t_0) \\ W(t,\tau) = C(t) \cdot H(t,\tau) + D(t) \delta(t-\tau) \end{cases}$$

con $H(t,t) = 0$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D u(t) = \Psi(t,t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t,\tau) u(\tau) \, d\tau$$

$$\Psi(t,t_0) = C(t) \cdot \Phi(t,t_0)$$

$$W(t,\tau) = C(t) H(t,\tau) + D(t) \delta(t-\tau)$$

FORMA IMPLICITA e ESPLICITA

Proposizione Alla forma implicita si può associare sempre una forma esplicita

1) DISCRETO

• implicita

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

• esplicita 1

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cdot A^{(t-t_0)} + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{(t-1-\tau)} Bu(\tau) \\ y(t) = C \cdot A^{(t-t_0)} x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} C \cdot A^{(t-1-\tau)} Bu(\tau) + Du(t) \end{cases}$$

• esplicita 2

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) = \Psi(t-t_0)x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} W(t-\tau)u(\tau) \end{cases}$$

EV. LIBERA STATO/USCITA

con

• $\Phi(t) = A^t$ matrice di TRANSIZIONE dello stato

• $H(t) = \begin{cases} A^{(t-1)}B, & t \geq 1 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ matrice di FORZAMENTO

• $\Psi(t) = CA^t$ matrice EVOLUZIONE LIBERA dell'uscita

• $W(t) = CA^{t-1}B + D\delta_k(t)$ matrice delle RISPOSTE IMPULSIVE

⇓

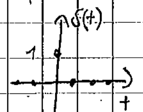
$y(t)_{forzata} = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} W(t-\tau)u(\tau)$

se $u(\tau) = \delta(\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = W(t)$

Def Si definisce funzione di Kroneker o impulso matematico a tempo discreto la funzione

$$\delta_k(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



con le seguenti proprietà:

1) $\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) = 1$

2) $\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) = f(t_0)$

2) CONTINUO

• implicita

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

• esplicita 1

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cdot e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \\ y(t) = x_0 \cdot C e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau + Du(t) \end{cases}$$

• esplicita 2

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} H(t-\tau)u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = \Psi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

con

• $\Phi(t) = e^{At}$ TRANSIZIONE

• $H(t) = e^{At} \cdot B$ FORZAMENTO

• $\Psi(t) = Ce^{At}$ EVOLUZIONE LIBERA

• $W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ RISPOSTA IMPULSIVA

Def Si definisce funzione di Dirac la funzione

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

con le proprietà

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau - t_0)\, d\tau = f(t_0)$

DISCRETIZZAZIONE

Un sistema discreto può essere visto come semplificazione di un sistema continuo.

Teorema Dato $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ se $\exists\, T \mid u(t)=u_k \quad \forall \, kT \le t \le (k+1)T, \quad k=0,1,\dots \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ovvero se l'ingresso è costante a tratti (successione di vettori reali $\in \mathbb{R}^p$) allora il sistema è discretizzabile.

Dim

$\bullet\, x(t_0)=x_0 \quad \bullet\, t=(k+1)T \quad \bullet\, t_0=kT \Rightarrow x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \Rightarrow$

$$\Rightarrow x((k+1)T)=e^{A(T)}x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu_k\,d\tau \Rightarrow$$

$\hookrightarrow (k+1)T-\tau=\theta \Rightarrow \quad \bullet\, d\theta=-d\tau \quad \bullet\, \int_{kT}^{(k+1)T} \rightarrow \int_{T}^{0}$

$$\Rightarrow e^{AT}x(kT)+\int_T^0 e^{A\theta}Bu_k(-d\theta) \Rightarrow x((k+1)T)=e^{AT}x(kT)+\int_0^T e^{A\theta}Bu_k\,d\theta$$

Pos.:
- $x(kT)=x_d(k)$
- $x(0)=x_0=x_d(0)$
- $e^{AT}=A_d$
- $\int_0^T e^{A\theta}B\,d\theta=B_d$
- $u_k=u_d(k)$

COROLLARIO: se $\exists\, A^{-1} \Rightarrow B_d=A^{-1}(e^{AT}-I)B$

Dim $\int_0^T e^{A\theta}B\,d\theta=\int_0^T A^{-1}A\cdot e^{A\theta}\cdot B\,d\theta=$

$=A^{-1}\int_0^T A\cdot e^{A\theta}\cdot B\cdot d\theta=$

$=A^{-1}\cdot\int_0^T \frac{de^{A\theta}}{d\theta}\cdot B\cdot d\theta=$

$=A^{-1}\cdot\left[e^{A\theta}\right]_0^T\cdot B=$

$=A^{-1}\left(e^{AT}-e^{A0}\right)\cdot B=A^{-1}\cdot\left(e^{AT}-I\right)\cdot B$

D I S C R E T I Z Z A Z I O N E

$$\begin{cases} x_d(k+1)=A_d\,x_d(k)+B_d\,u_d(k) \\ x_d(0)=x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_d(k)=y(kT) \\ y_d(k)=C\,x_d(k)+D\,u_d(k) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Poiché nel tempo discreto la posizione di x rispetto a T è la stessa che nel tempo continuo, i due sistemi sono equivalenti.

Discretizzazione importante poiché non ci interessa conoscere continuamente l'informazione, ma ogni quanto di tempo T sufficientemente piccolo.