MODI NATURALI (sistemi lineari stazionari)

Evoluzione e uscita, sia libera che forzata, sono dipendenti dalla matrice dell'evoluzione dello stato A. Utilizzando la scrittura di potenza ed esponenziale di matrice in forma spettrale ($A^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t u_i v_i^T$, $e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T$, quindi secondo gli autovalori λ), è possibile studiare i singoli modi naturali, ognuno associato all'autovalore. In particolare, analizzando il valore di λ, è possibile

- associargli il MODO NATURALE e studiarne l'andamento
- associargli la LEGGE DI MOTO DEL SISTEMA
- studiare la stabilità dei singoli modi e del sistema nello spazio di stato e nel campo degli autovalori
- analizzare il contributo del modo all'evoluzione (e all'uscita) libera del sistema (modo ECCITATO DALLO STATO INIZIALE x_0)
- analizzare il contributo del modo all'evoluzione (e all'uscita) forzata del sistema (modo ECCITABILE CON IMPULSI IN INGRESSO)
- analizzare se un modo è osservabile in uscita (OSSERVABILITÀ di un modo)

Ipotesi: A matrice ad autovalori distinti $\Rightarrow$ • $v_j^T u_k = 1 \ \forall k=j$; $v_j^T u_k = 0 \ \forall k \neq j$
• n-ple u base di $\mathbb{C}^{n \times n}$ ($X \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$)

con $\lambda_{i=1,2,\dots,n} = \begin{cases} \gamma \text{ aut. reali e distinti} \\ \mu \text{ coppie aut. complessi e coniugati} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ nb: λ reale $\Rightarrow u$ e v reali; λ complesso $\Rightarrow u$ e v complessi

• MODI, LEGGE DI MOTO, ANDAMENTO e STABILITÀ

1) Tempo Continuo

$x_{lib}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0 \Rightarrow$

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i v_i^T = \sum_{i=1}^{\gamma} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i v_i^T + \sum_{i=1}^{\mu} e^{\bar{\lambda}_i (t-t_0)} \bar{u}_i \bar{v}_i^T + e^{\bar{\lambda}_i^* (t-t_0)} \bar{u}_i^* \bar{v}_i^{*T}$$

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{\gamma} c_i u_i + \sum_{i=1}^{\mu} \bar{c}_i \bar{u}_i + \bar{c}_i^* \bar{u}_i^* \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \bullet\ c_i = v_i^T x_0 \\ \bullet\ \bar{c}_i = \bar{v}_i^T x_0 \\ \bullet\ \bar{c}_i^* = \bar{v}_i^{*T} x_0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{lib}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i v_i^T\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) \Rightarrow \boxed{x_{lib}(t) = \sum_{i=1}^{\gamma} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i c_i + \sum_{i=1}^{\mu} e^{\bar{\lambda}_i (t-t_0)} \bar{u}_i \bar{c}_i + e^{\bar{\lambda}_i^* (t-t_0)} \bar{u}_i^* \bar{c}_i^*}$$

(ricordando che $v_i^T u_k = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$)

EV. LIBERA COME SOMMA DEI MODI NATURALI

A questo punto l'analisi può essere divisa a seconda che λ sia reale o complesso. Mentre per i reali lo studio è immediato, per i complessi l'espressione può essere semplificata.

$\sum_{i=1}^{\mu} e^{\bar{\lambda}_i (t-t_0)} \bar{u}_i \bar{c}_i + e^{\bar{\lambda}_i^* (t-t_0)} \bar{u}_i^* \bar{c}_i^* \rightarrow$ analizziamo $e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{u}_i \bar{c}_i + e^{\bar{\lambda}_i^* t} \bar{u}_i^* \bar{c}_i^*$ per comodità. Poiché $\bar{a} + \bar{a}^* = 2\mathrm{Re}[\bar{a}]$, ponendo 1) $e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t + i\beta t}$ 2) $\bar{u} = u_a + i u_b$ 3) $\bar{c} = m \cdot e^{i\theta}$ si ha

$2\mathrm{Re}[e^{\alpha t + i\beta t} \cdot (u_a + i u_b) \cdot m e^{i\theta}] = 2\mathrm{Re}[e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)) \cdot (u_a + i u_b) \cdot m (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)] =$

$= \dots = 2 e^{\alpha t} m (u_a \cos(\beta t + \theta) - u_b\,\mathrm{sen}(\beta t + \theta))$. Reintegrando t_0 si ha

$$\begin{cases} e^{\lambda_i (t-t_0)} \cdot c_i \cdot u_i & \text{MODO NATURALE associato all'autovalore REALE } \lambda_i \\ 2 \cdot e^{\alpha_i (t-t_0)} m_i \left(u_{i,a} \cos(\beta_i (t-t_0) + \theta_i) - u_{i,b} \operatorname{sen}(\beta_i (t-t_0) + \theta_i) \right) & \text{MODO NATURALE associato alla coppia di autovalori COMPLESSI E CONIUGATI} \end{cases}$$

$\lambda_i, \lambda_i^* = \alpha_i \pm \beta_i$ $\quad (\omega_i = \beta)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} e^{\lambda_i t} & \text{LEGGE DI MOTO relativa all'autovalore REALE } \lambda_i \\ e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) & \text{LEGGE DI MOTO relativa alla coppia di autovalori COMPLESSI E CONIUGATI } \lambda_i, \lambda_i^* \end{cases}$$

Il sistema si può quindi esprimere nel seguente modo:

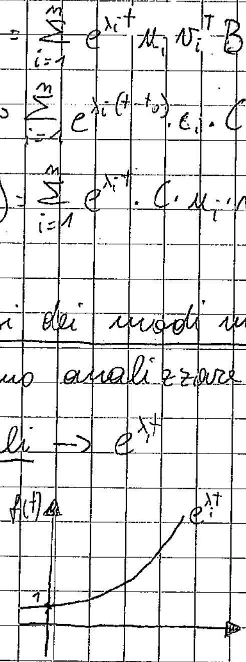
$$\begin{cases} x_{lib}(t) = \sum_{i=1}^{\gamma} e^{\lambda_i (t-t_0)} c_i u_i + \sum_{i=1}^{\mu} 2 m_i e^{\alpha_i (t-t_0)} \cdot \left(u_{i,a} \cdot \cos(\beta_i (t-t_0) + \theta_i) - u_{i,b} \cdot \operatorname{sen}(\beta_i (t-t_0) + \theta_i) \right) \\ x_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T B \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_i \tau} u(\tau)\, d\tau \\ y_{lib}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} \cdot c_i \cdot C \cdot u_i \quad (= C \cdot x_{lib}(t)) \\ y_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \cdot C \cdot u_i \cdot v_i^T \cdot B \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_i \tau} u(\tau)\, d\tau + D u(t) \end{cases}$$

SISTEMA COME SOMMA DEI MODI NATURALI

- Analisi dei modi naturali

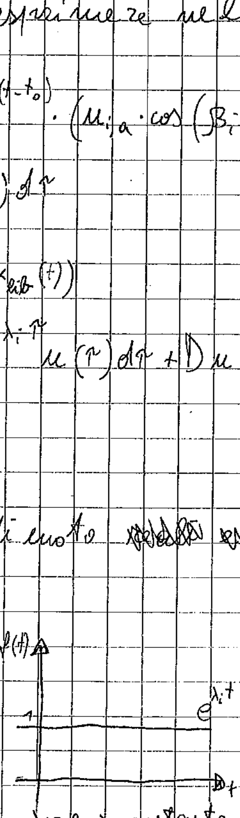
Possiamo analizzare le leggi di moto ~~~~ rispetto al valore di λ_i:

1) Reali $\rightarrow e^{\lambda_i t}$



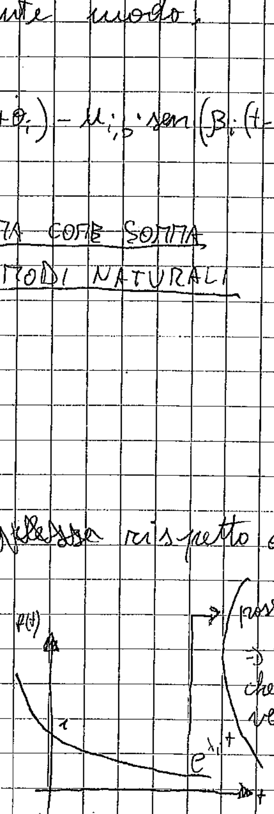
$\lambda_i > 0 \Rightarrow$ diverge

modo INSTABILE



$\lambda_i = 0 \Rightarrow$ costante

modo STABILE

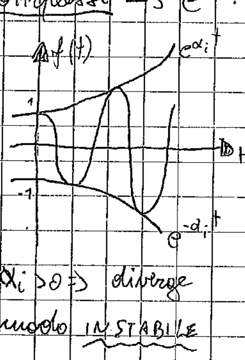


(posto $\lambda_i = -\frac{1}{\tau_k} \Rightarrow e^{-t/\tau_k} \Rightarrow$
$\Rightarrow \tau_k$ = costante di tempo che ci dice quanto velocemente il sistema evolve)

$\lambda_i < 0 \Rightarrow$ converge

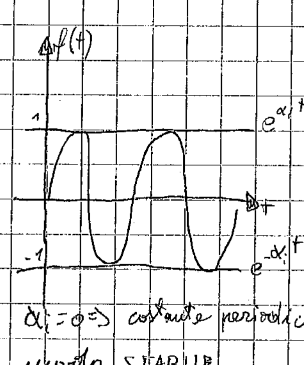
modo ASINTOTICAMENTE STABILE

2) Complessi $\rightarrow e^{\alpha_i t} \cdot \cos(\beta_i t)$



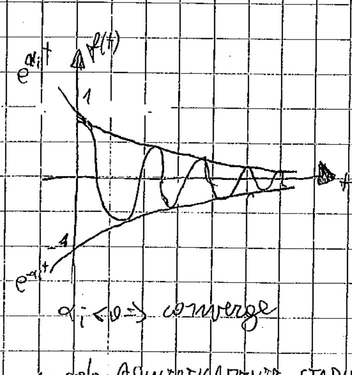
$\alpha_i > 0 \Rightarrow$ diverge

modo INSTABILE



$\alpha_i = 0 \Rightarrow$ costante periodico

modo STABILE



$\alpha_i < 0 \Rightarrow$ converge

modo ASINTOTICAMENTE STABILE

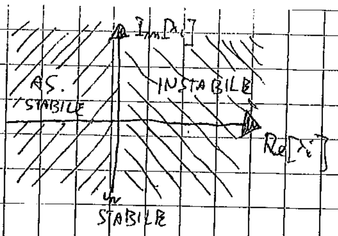
Quindi con λ_i reale (complesso) si ha un andamento aperiodico (pseudoperiodico) divergente per $\lambda_i > 0$ ($Re[\lambda_i] > 0$), costante per $\lambda_i = 0$ ($Re[\lambda_i] = 0$), ~~decrescente~~ convergente per $\lambda_i < 0$ ($Re[\lambda_i] < 0$)

Quindi: $\cdot\ \lambda_i > 0$ o $Re[\lambda_i] > 0 \Rightarrow$ modo INSTABILE

$\cdot\ \lambda_i = 0$ o $Re[\lambda_i] = 0 \Rightarrow$ modo STABILE

$\cdot\ \lambda_i < 0$ o $Re[\lambda_i] < 0 \Rightarrow$ modo ASINTOTICAMENTE STABILE

CAMPO AUTOVALORI $\Rightarrow$



Def Un sistema (X, φ, η) è asintoticamente stabile se lo sono tutti i suoi modi naturali

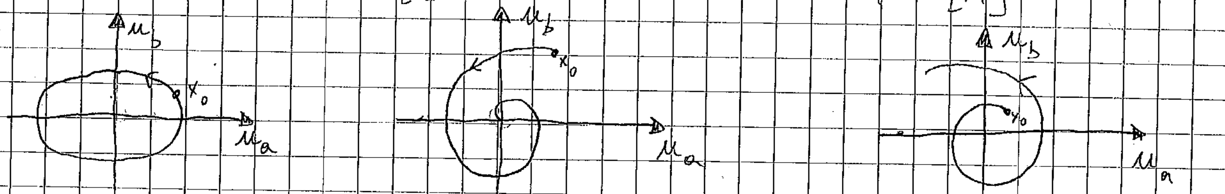
$\hookrightarrow$ Teo C.N. e S. affinché (X, φ, η) sia asintoticamente stabile è che tutti gli autovalori di A abbiano parte reale minore di zero

Def Si definisce PULSAZIONE NATURALE lo scalare $\omega_{Ni} = |\lambda_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$

Def Si definisce COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO lo scalare $\xi_K = \frac{-\alpha_K}{\sqrt{\alpha_K^2 + \beta_K^2}} \Rightarrow |\xi_K| \leq 1$

Un'ulteriore analisi degli autovalori può essere fatta nello spazio di stato. Il sistema, evolvendosi, individua dei vettori $u_{i,a}$ ed $u_{i,b}$ componenti dell'autovettore u_i

$\alpha_i = Re[\lambda_i] = 0$ $\qquad$ $Re[\lambda_i] = \alpha_i < 0$ $\qquad$ $\alpha_i = Re[\lambda_i] > 0$



ELLISSE $\qquad$ SPIRALE CONVERGENTE $\qquad$ SPIRALE DIVERGENTE

2) tempo discreto

Valgono gli stessi ragionamenti del tempo continuo. Data $A^{t-t_0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(t-t_0)} u_i v_i^T$ si ha

$$\boxed{x_{lib}(t) = \sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i^{(t-t_0)} c_i u_i + \sum_{i=1}^{\mu} \bar{\lambda}_i^{(t-t_0)} \bar{c}_i \bar{u}_i + \bar{\lambda}_i^{*(t-t_0)} \bar{c}_i^* \bar{u}_i^*}$$

EV. LIBERA COME SOMMA DI MODI NATURALI

differenza rispetto al continuo: forma polare

Analizzando il termine complesso, posto $\bar{c}_i = m_i e^{i\theta_i}$, $\bar{u}_i = (u_{i,a} + i u_{i,b})$ e $\underline{\lambda_i^{(t-t_0)} = \alpha_i^{(t-t_0)} e^{i\beta_i(t-t_0)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 Re\left[\alpha_i^{(t-t_0)} e^{i\beta(t-t_0)} \cdot m_i e^{i\theta_i} \cdot (u_{i,a} + i u_{i,b})\right] = \ldots = 2\alpha_i^{(t-t_0)} m_i \cdot \left(u_{i,a} \cdot \cos(\beta_i(t-t_0)+\theta_i) - u_{i,b} \operatorname{sen}(\beta_i(t-t_0)+\theta_i)\right)$$

$\left\{\begin{array}{l} \lambda_K^{(t-t_0)} c_K u_K \\ 2 m_K \alpha_K^{(t-t_0)} \cdot \left(u_{K,a} \cos(\beta_K(t-t_0)+\theta_K) - u_{K,b} \operatorname{sen}(\beta_K(t-t_0)+\theta_K)\right) \end{array}\right.$

MODO NATURALE dell'autovalore REALE λ_K

MODO NATURALE della coppia di aut. COMPLESSI CONIUGATI $\bar{\lambda}_K = \alpha_K \pm i\beta_K$

$\left\{\begin{array}{l} \lambda_K^{t} \\ \alpha_K^{t} \cdot \cos(\beta_K t) \end{array}\right.$

LEGGE DI MOTO dell'autovalore REALE λ_K

LEGGE DI MOTO della coppia di aut. COMPLESSI e CONIUGATI $\bar{\lambda}_K = \alpha_K \pm i\beta_K$

Il sistema si può quindi esprimere nel seguente modo:

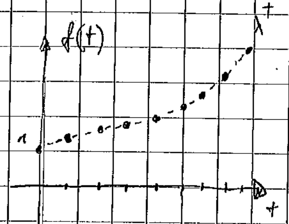
$$\begin{cases} x_{lib}(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k^{(t-t_0)} c_k u_k + \sum_{k=1}^{\mu} 2 u_k \alpha_k^{(t-t_0)} \cdot \left(u_{k,a} \cdot \cos\left(\beta_k (t-t_0) + \theta_k\right) - u_{k,b} \cdot \mathrm{sen}\left(\beta_k (t-t_0) + \theta_k\right)\right) \\ x_{for}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(t-1)} u_k v_k^T B \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \lambda_k^{-\tau} u(\tau) \\ y_{lib}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(t-t_0)} c_k \cdot C \cdot u_k \\ y_{for}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(t-1)} \cdot C \cdot u_k \cdot v_k^T \cdot B \cdot \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \lambda_k^{-\tau} u(\tau) + D u(t) \end{cases}$$

SISTEMA COME SOMMA DI MODI NATURALI

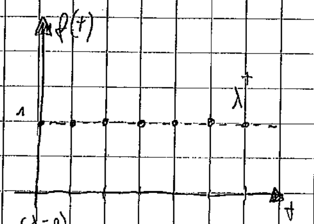
· Analisi dei modi naturali

Come per il continuo, possiamo analizzare le leggi di moto rispetto al valore di λ:

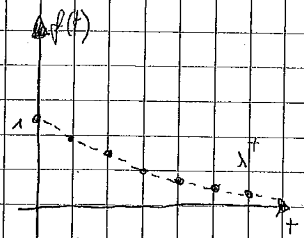
1) Reali $\rightarrow \lambda_k^t$



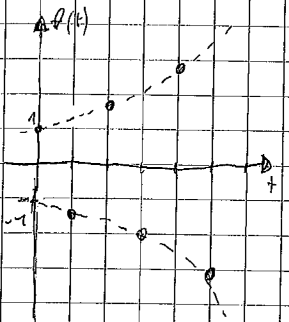
$\lambda > 1 \Rightarrow$ diverge
modo INSTABILE



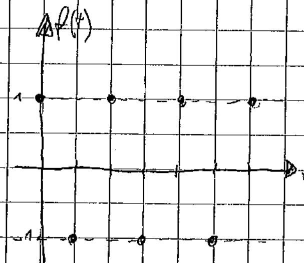
$(\lambda = 0)$
$\lambda = 1 \Rightarrow$ costante
modo STABILE



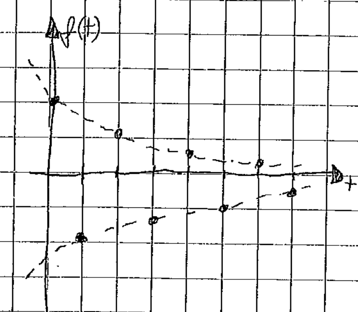
$0 < \lambda < 1 \Rightarrow$ converge
modo ASINTOTICAMENTE STABILE



$\lambda < -1 \Rightarrow$ diverge, alternato
modo INSTABILE

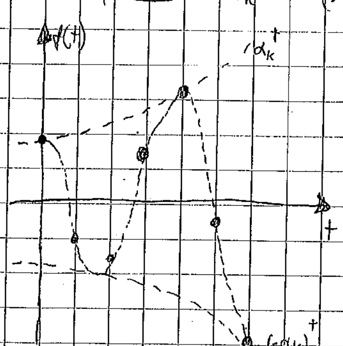


$\lambda = -1 \Rightarrow$ costante, alternato
modo STABILE

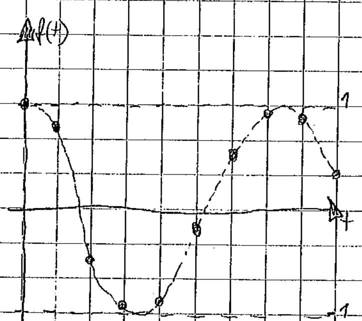


$-1 < \lambda < 0 \Rightarrow$ converge, alternato
modo ASINTOTICAMENTE STABILE

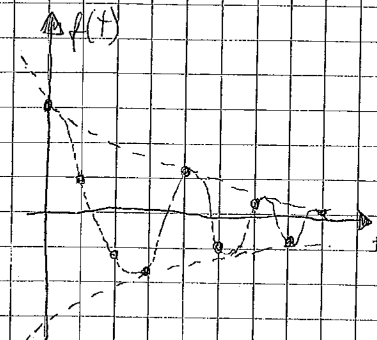
2) Complessi $\rightarrow \alpha_k^t \cos(\beta_k t)$



$|\lambda_k| > 1 \Rightarrow$ diverge
modo INSTABILE



$(|\lambda_k| = 0)$
$|\lambda_k| = 1 \Rightarrow$ costante
modo STABILE

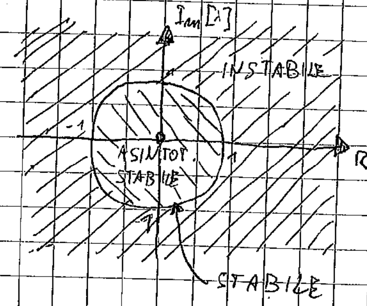


$|\lambda_k| < 1 \Rightarrow$ converge
modo ASINTOTICAMENTE STABILE

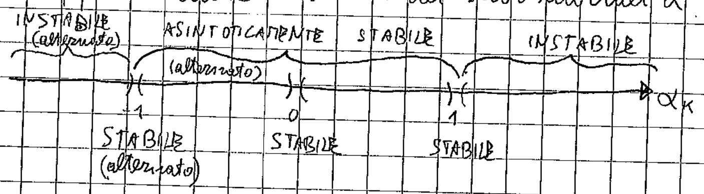
Quindi con λ_k reale (complesso) si ha un andamento aperiodico (pseudoperiodico) divergente per $|\lambda_k|>1$, costante per $|\lambda_k|=1$ o $\lambda=0$, convergente per $|\lambda_k|<1$.
In particolare, per valori reali, se $\lambda_k<0$ l'andamento sarà anche alternato.

Quindi:
- $|\lambda|>1 \Rightarrow$ modo INSTABILE
- $|\lambda|=1$, $\lambda=0 \Rightarrow$ modo STABILE
- $|\lambda|<1 \Rightarrow$ modo ASINTOTICAMENTE STABILE

CAMPO AUTOVALORI $\Rightarrow$

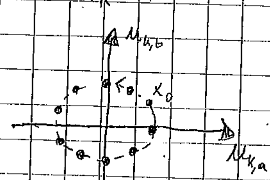


Possiamo anche analizzare i λ sull'asse rappresentante il valore dei suoi moduli α



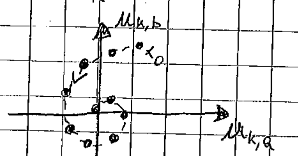
Possiamo di nuovo estendere l'analisi allo spazio di stato. Analizziamo solo i valori positivi di λ per comodità grafica.

$\alpha_k = 1$



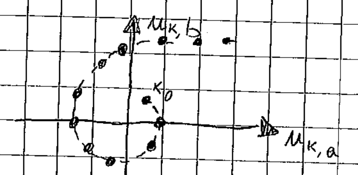
ELLISSE DISCRETA

$0 < \alpha_k < 1$



SPIRALE DISCRETA CONVERGENTE

$\alpha_k > 1$



SPIRALE DISCRETA DIVERGENTE

ECCITABILITÀ e OSSERVABILITÀ

Discorso unico in questo caso può essere fatto per tempo discreto e continuo.
Eccitabilità e Osservabilità ci dicono se i singoli modi contribuiscono all'evoluzione ed all'uscita del sistema. I modi naturali possono essere:

1) ECCITATI dallo stato iniziale x_0
2) ECCITABILI con impulsi in ingresso
3) OSSERVABILI in uscita

(esempi fatti in riferimento al continuo ma validi anche per il discreto)

1) modo ECCITATO DALLO STATO INIZIALE x_0

Poiché $x(t)$ è espresso come somma di esponenziali aperiodici e pseudo-periodici del tipo $c_i \cdot e^{\lambda_i t}$, l'ampiezza c_i del moto dipenderà dalla componente dello stato iniziale (o meglio, dalla sua ampiezza) in relazione al corrispondente autovettore u_i ($x(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i$). Dire che il modo i-esimo è ECCITATO dallo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$ significa che quello stato ha componente non nulla lungo l'autovettore u_i

$\Downarrow$

modo λ_i eccitato da x_0 se $\boxed{c_i = v_i^T \cdot x_0 \neq 0}$ $\Rightarrow$ $x_{ev} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i c_i$ $\Rightarrow$ se $c_i \neq 0$ contribuisce all'evoluzione

2) modo ECCITABILE per IMPULSI IN INGRESSO

Il modo i-esimo si dice ECCITABILE per IMPULSI in INGRESSO se, preso il corrispondente e_i vettore base di $\mathbb{R}^p$, risulta per $u(t) = e_i \delta(t)$, risulta $\int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot e_i \delta(\tau) d\tau = e^{At} \cdot B_i$, con B_i i-esima colonna di B.

Si può quindi notare come la evoluzione forzata coincida con quella libera nel caso di una condizione iniziale $x(0) = B_i$.

In particolare

modo λ_i ECCITABILE per IMPULSI IN INGRESSO se $\boxed{v_J^T B \neq 0}$. Essendo ~~[illegible]~~ $x_{for}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i \underbrace{v_i^T \cdot B}_{} \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_i \tau} u(\tau) d\tau$ si ha che se il modo i-esimo è eccitabile allora contribuisce all'evoluzione forzata.

3) OSSERVABILITÁ del modo i-esimo in uscita

Abbiamo $y(t) = C(x_{lib}(t) + x_{for}(t)) \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} c_i \underbrace{C u_i} + \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \cdot \underbrace{C \cdot u_i} \cdot v_i^T \cdot B \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_i \tau} u(\tau) d\tau + Du(t)$

$* + Du(t)$

Il modo i-esimo è osservabile in uscita se $\boxed{C \cdot u_i \neq 0}$.

Questo significa che, analizzando l'uscita come somma dei modi naturali, questa abbia componente non nulla relativamente all'autovettore u_i corrispondente.

CONCLUSIONE

Prendendo in esame l'evoluzione libera abbiamo visto come, se la matrice A ha tutti autovalori distinti, possa essere espresso secondo combinazione lineare (rispetto ai coefficienti c_i dipendenti dallo stato iniziale) di n evoluzioni indipendenti: i modi. Ognuno di questi modi, a prescindere dall'andamento (convergente, costante, divergente), seguono la direzione dell'autovettore correlato. E, poiché l'autovettore identifica un proprio autospazio (sottospazio dello spazio $n \times n$), queste singole evoluzioni avvengono proprio in questi autospazi.

Analizzare l'evoluzione secondo i modi naturali significa quindi analizzare l'evoluzioni delle singole componenti del sistema nello spazio di stato; ovvero i modi naturali sono le componenti dell'evoluzione del sistema che avvengono nei sottospazi dello spazio di stato (autospazi): ogni evoluzione è combinazione lineare di questi modi in relazione alla componente dello stato iniziale nel relativo autospazio.

NB tutti i discorsi fatti valgono per matrici aventi autovalori con molteplicità algebrica uguale a quella geometrica

RIASSUNTO MODI NATURALI

Analisi dell'evoluzione di $x(t)$ nell'autospazio.

Hp: A ad autoval. distinti $\Rightarrow v_j^T \cdot u_k = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$; γ autoval reali, μ coppie compl. coniug

n autoval $= \gamma + 2\mu$

1) continuo

- $e^{A(t-t_0)} = \sum_{i=1}^{\gamma} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i v_i^T + \sum_{i=1}^{\mu} e^{\bar{\lambda}_i (t-t_0)} \bar{u}_i \bar{v}_i^T + e^{\bar{\lambda}_i^* (t-t_0)} \bar{u}_i^* \bar{v}_i^{*T}$
- $x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot u_i$ con $c_k = v_k^T \cdot x_0$

$$x_{lib} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i v_i^T \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

$$\Rightarrow x_{lib}(t) = \sum_{i=1}^{\gamma} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i c_i + 2 Re\left[\sum_{i=1}^{\mu} e^{\bar{\lambda}_i (t-t_0)} \bar{u}_i \bar{c}_i\right]$$

$$\left(e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t + i\beta t};\ \bar{u} = u_a + i u_b;\ \bar{c} = m \cdot e^{i\theta}\right)$$

MODI: $\begin{cases} e^{\lambda_i (t-t_0)} c_i u_i & \lambda \text{ reale} \\ e^{\alpha_i (t-t_0)} m_i \left(u_{i,a} \cos(\beta_i (t-t_0) + \theta_i) - u_{i,b} \,\text{sen}(\beta_i (t-t_0) + \theta_i)\right) & \lambda \text{ complesso} \end{cases}$

LEGGI: $\begin{cases} e^{\lambda_i t} \rightarrow \\ e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i (t)) \rightarrow \end{cases}$ modo
- stabile per $Re[\lambda] = 0$
- instabile per $Re[\lambda] > 0$
- asintoticamente stabile per $Re[\lambda] < 0$

2) discreto

stesso ragionamento. Differenze:

- $A^{(t-t_0)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(t-t_0)} u_i v_i^T$ (1)

$$x_{lib} = \sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i^{(t-t_0)} u_i \cdot c_i + 2 Re\left[\sum_{i=1}^{\mu} \bar{\lambda}_i^{(t-t_0)} \bar{u}_i \bar{c}_i\right]$$

$$\bar{\lambda}_i^{(t-t_0)} = \alpha_i^{(t-t_0)} \cdot e^{i\beta_i (t-t_0)}$$ (2)

MODI:
- STABILE per $Re[\lambda] = |1|, = 0$
- INSTABILE per $Re[\lambda] > |1|$
- ASINT. STABILE per $Re[\lambda] < |1|$

NB per $\lambda < 0$, modi alternati

Def modo eccitato dallo stato iniziale x_0 se $c_i = v_i^T \cdot x_0 \neq 0 \Rightarrow$ contr. all'evoluzione

Def modo eccitabile per impulsi in ingresso se $v_j^T \cdot B \neq 0 \Rightarrow$ " "

Def modo osservabile in uscita se $C \cdot u_i \neq 0$