TRASFORMATA DI LAPLACE

Def Sia $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ avente le seguenti proprietà:

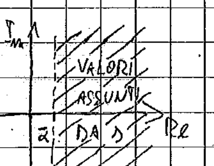
ovvero f è funzione originale:

1) $f(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$
2) $\exists\, M_f, \alpha_f \in \mathbb{R}^+_0 \;|\; \|f(t)\| \leq M \cdot e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$
3) $\forall\, [a,b] \;|\; a,b \in (-\infty; +\infty)$ f ha al più un numero finito di discontinuità di 1ª specie $\left(\lim_{t\to x^-} f(t) \;\exists \neq \lim_{t \to x^+} f(t) \;\exists\right)$

Allora può essere definita $F: S \to \mathbb{C}$ con $S: \{s \in \mathbb{C} \;|\; \mathrm{Re}[s] > \alpha\} \subseteq \mathbb{C}$

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt} \quad \text{TRASFORMATA DI LAPLACE}$$

- <u>nota 1</u>: si definisce "$\mathcal{L}$" l'operatore che associa, ove possibile, ad una funzione f la sua trasformata $F \to \mathcal{L}(f) = F$
- <u>nota 2</u>: α si dice indice di grado di convergenza di f: $\alpha = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M \;|\; \|f(t)\| \leq M e^{\alpha t} \;\forall t \geq 0\}$
- <u>nota 3</u>: la definizione della trasformata di Laplace come funzione è corretta se e solo se l'integrale esiste ed è convergente. Dimostriamolo



$\mathrm{Re}[s] > \alpha \Rightarrow s = (\alpha + p) + i\beta$ con $p > 0$ essendo $\alpha \in \mathbb{R}^+_0$ $\qquad p = 1 \Rightarrow | \cdot | = \sqrt{\cos^2 + \mathrm{sen}^2} = 1$

$$\int_0^b |f(t) \cdot e^{-st}|\, dt \leq \int_0^b |f(t)| \cdot |e^{-st}|\, dt \leq \int_0^b M \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-(\alpha+p)t} \cdot |e^{-i\beta t}|\, dt =$$

$$= \int_0^b M \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-(\alpha+p)t}\, dt \leq \int_0^b M \cdot e^{(\alpha + p/2)t} \cdot e^{-(\alpha+p)t}\, dt \leq \int_0^b M\, e^{-\frac{p}{2}t}\, dt =$$

$$= -\frac{2M}{p} \cdot \left[e^{-\frac{p}{2}t}\right]_0^b = -2\frac{M}{p}\left(e^{-\frac{p}{2}b} - 1\right), \quad \lim_{b \to \infty} = 2\frac{M}{p} \Rightarrow \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt \leq 2\frac{M}{p} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge

<u>PROPOSIZIONE 1: LINEARITÀ</u>

La Trasformata di Laplace è un <u>operatore lineare</u>: date f_1 e f_2 due funzioni con gradi di crescenza α_1 e α_2, e $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ costanti, allora la funzione $f = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$ è $\mathcal{L}$ trasformabile con

- $\alpha \leq \max(\alpha_1, \alpha_2)$
- $\mathcal{L}[f] = \beta_1 \mathcal{L}[f_1] + \beta_2 \mathcal{L}[f_2]$

<u>Dim</u>

- $\|f(t)\| = \|\beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t)\| \leq |\beta_1| \cdot \|f_1(t)\| + |\beta_2| \cdot \|f_2(t)\| \leq |\beta_1| M_1 e^{\alpha_1 t} + |\beta_2| M_2 e^{\alpha_2 t} \leq$
  $\leq (|\beta_1| M_1 + |\beta_2| M_2) \cdot e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t}$
- $\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \beta_1 f_1(t) \cdot e^{-st}\, dt + \int_0^\infty \beta_2 f_2(t) e^{-st}\, dt = \beta_1 \mathcal{L}[f_1] + \beta_2 \mathcal{L}[f_2] = \mathcal{L}[f]$

PROPOSIZIONE 2: DERIVATA

Sia $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ un funzione derivabile in $[0;\infty)$, $\mathcal{L}$-trasformabile con grado di convergenza α e trasformata F. Allora, $\dot{f}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile con grado di convergenza $\dot{\alpha}=\alpha$ e risulta

$$\boxed{\mathcal{L}[\dot{f}(t)]=sF(s)-f(0^+)}$$

Dim

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)]=\int_0^\infty \dot{f}(t)\cdot e^{-st}dt=\left[f(t)\cdot e^{-st}\right]_0^\infty-\int_0^\infty f(t)\cdot(-s)e^{-st}dt=$$

$$=-f(0)+s\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt=s\cdot F(s)-f(0^+)$$

PROPOSIZIONE 3: INTEGRALE

Data $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$, supposto $f(0)=0$, si ha $\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}}$ con $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$

Dim

$$\int_0^t x(\tau)d\tau=f(t)\Rightarrow\mathcal{L}[f(t)]=F(s);\quad \mathcal{L}[\dot{f}(t)]=\mathcal{L}[x(t)]=s\cdot F(s)\Rightarrow F(s)=\frac{\mathcal{L}[x(t)]}{s}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right]=\frac{\mathcal{L}[x(t)]}{s}$$

~~PROP~~

PROPOSIZIONE 4: HEAVISIDE (o funzione a gradino) e DELTA DI DIRAC

$$\delta_{-1}(t):=\begin{cases}0 & \forall t<0\\ 1 & \forall t\geq 0\end{cases}\Rightarrow\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)]=\int_0^\infty\delta_{-1}(t)\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

$$\delta(t):=\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}, & \forall t\leq\left|\frac{\varepsilon}{2}\right|\\ 0 & \forall t\geq\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}\Rightarrow\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_0^\infty\delta(t)\cdot e^{-st}dt=e^{-s0}=1$$

(per la proprietà del δ: $\int_a^b\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$, $t_0\in[a,b]$)

PROPOSIZIONE 5: FUNZIONE TRASLATA

Sia f una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con grado α e trasformata $F(s)$. Sia $\Delta>0\in\mathbb{R}$ e $g(t):=f(t-\Delta)$ la funzione f traslata. Risulterà che

$$\mathcal{L}[g(t)]=\boxed{\mathcal{L}[f(t-\Delta)]=e^{-s\Delta}\cdot F(s)}$$

Dim

$$\mathcal{L}[g(t)]=\int_0^\infty g(t)\cdot e^{-st}dt=\int_\Delta^\infty f(t-\Delta)\cdot e^{-s(t)}dt\Rightarrow$$

- $t-\Delta=\tau\to t=\tau+\Delta$
- $t\to\infty\Rightarrow\tau\to\infty$
- $t\to\Delta\Rightarrow\tau\to 0$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-(\tau+\Delta)s}d\tau=e^{-\Delta s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{-\Delta s}\cdot F(s)$$

Inoltre $|f(t)|\leq M\cdot e^{\alpha t}\Rightarrow|f(t-\Delta)|\leq M\cdot e^{\alpha(t-\Delta)}=\underbrace{M\cdot e^{-\Delta}}_{=M_\Delta}\cdot e^{\alpha t}=M_\Delta\cdot e^{\alpha t}$ stesso grado di convergenza

PROPOSIZIONE 6: CONVOLUZIONE DI DUE SEGNALI

Date f e g due funzioni $(-\infty;+\infty) \to \mathbb{C}$, si definisce convoluzione la funzione $f*g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$; se f e g sono $\mathcal{L}$-trasformabili con $\mathcal{L}[f]=F(s)$, $\mathcal{L}[g]=G(s)$ con indici α_f, α_g la trasformata di $f*g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ (essendo $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^t + \int_t^{+\infty}$, con primo e ultimo $=0$), si ha

$$\boxed{\mathcal{L}[f*g] = F(s)\cdot G(s)}$$

Dim

anche se $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$, scriviamola utilizzando gli estremi $\pm\infty$. Sarà

$$\mathcal{L}[f*g] = \int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,e^{-st}\,d\tau\,dt =$$

$= \int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\cdot e^{-st}\,dt\right)\cdot g(\tau)\,d\tau$. L'integrale interno $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}\,dt\right)$ sarà uguale all'integrale $\int_\tau^{+\infty}$, essendo $f(x)=0\ \forall x<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}[f*g] = \int_0^{\infty} g(\tau)\left(\int_\tau^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}\,dt\right)d\tau \Rightarrow$ cambio variabile

- $t-\tau=\theta \Rightarrow t=\theta+\tau$
- $t\to\tau \Rightarrow \theta\to 0$
- $t\to\infty \Rightarrow \theta\to\infty$

$$= \int_0^{\infty} g(\tau)\cdot\left(\int_0^{\infty} f(\theta)e^{-s(\theta+\tau)}\,dt\right)d\tau = \int_0^{\infty} \underbrace{g(\tau)\cdot e^{-s\tau}}_{1}\cdot\left(\underbrace{\int_0^{\infty} f(\theta)e^{-s\theta}\,d\theta}_{2}\right)d\tau \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1 $= G(s)$; 2 $= F(s) \Rightarrow \mathcal{L}[f*g] = F(s)\cdot G(s)$

PROPOSIZIONE 7: TRASFORMATA DI $e^{\lambda t}\cdot f(t)$

Data f funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con grado α_f e trasformata $F(s) \Rightarrow$ la funzione $g(t)=e^{\lambda t}\cdot f(t)$, $\lambda\in\mathbb{C}$ ammetterà trasformata

$$\mathcal{L}[g(t)] = \boxed{\mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)] = F(s-\lambda)} \quad \text{con } \alpha_g = \alpha_f + Re(\lambda)$$

Dim

$$\int_0^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{\lambda t}\cdot f(t)\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{\overbrace{-(s+\lambda)}^{=p}t}\,dt = F(p) = F(s-\lambda)$$

nota per le condizioni di trasformabilità ($Re[s]>\alpha\ \forall s$) dovremo avere $Re[s-\lambda] = Re[s]-Re[\lambda] > \alpha_f$ (condizione per la quale $s-\lambda$ appartenga al dominio della trasformata)

PROPOSIZIONE 8: TRASFORMATA DI $e^{\lambda t}$ e $\frac{t^n}{n!}$

- Data $f(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t) \rightarrow \boxed{\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)\cdot e^{\lambda t}] = \frac{1}{s-\lambda}}$

Dim

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)e^{\lambda t}] = \int_0^{\infty} e^{\lambda t}\cdot e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\lambda)t}dt = -\frac{1}{s-\lambda}\left[e^{-(s-\lambda)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-\lambda}$$

- Data $f(t) = \delta_{-1}(t)\cdot\frac{t^n}{n!} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\left[\delta_{-1}(t)\cdot\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}}} \Rightarrow \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)\cdot t^n] = n!\,\frac{1}{s^{n+1}}$

Dim per induzione

Vera per $n=0$: $\delta_{-1}(t) = \frac{1}{s}$

Supposta vera per $\bar{n}$ $\left(=\frac{1}{s^{\bar{n}+1}}\right)$, dimostriamola per $\bar{n}+1$

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{\bar{n}+1}}{(\bar{n}+1)!}\cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s\cdot(\bar{n}+1)!}\int_0^{\infty} t^{\bar{n}+1}\cdot(-s)e^{-st}dt = -\frac{1}{s(\bar{n}+1)!}\underbrace{\left[e^{-st}\cdot t^{\bar{n}+1}\right]_0^{\infty}}_{=0} +$$

$$-\frac{1}{s(\bar{n}+1)!}\int_0^{\infty}(\bar{n}+1)\cdot t^{\bar{n}}\cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s(\bar{n}+1)!}\cdot(\bar{n}+1)\int_0^{\infty} t^{\bar{n}}e^{-st}dt =$$

$$= -\frac{1}{s}\int_0^{\infty}\frac{t^{\bar{n}}}{\bar{n}!}e^{-st}dt = +\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^{\bar{n}+1}} = \frac{1}{s^{\bar{n}+2}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\delta_{-1}(t)\cdot e^{\lambda t}\cdot\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}}}$$

PROPOSIZIONE 9: TRASFORMATA sen e cos

- Data $f(t) = \cos(\omega t)$, $\omega\in\mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{\omega^2+s^2}}$ con $\alpha=0$

Dim

$$\cos(\omega t) = \frac{\cos(\omega t)+i\,\text{sen}(\omega t)+\cos(\omega t)-i\,\text{sen}(\omega t)}{2} = \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2};$$

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}\cos(\omega t)] = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{i\omega t}e^{-st}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-i\omega t}e^{-st}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

- Data $f(t) = \text{sen}(\omega t)\delta_{-1}(t)$, $\omega\in\mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$ con $\alpha=0$

Dim

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{\cos(\omega t)+i\,\text{sen}(\omega t)-(\cos(\omega t)-i\,\text{sen}(\omega t))}{2i} = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i},$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{2i}\left(\int_0^{\infty}e^{i\omega t}e^{-st}dt - \int_0^{\infty}e^{-i\omega t}\cdot e^{-st}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

SISTEMI LINEARI TEMPO CONTINUO - LAPLACE

Abbiamo il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \end{cases} \Rightarrow \exists \mathcal{L}[x(t)]\ ? \Rightarrow$

$\Rightarrow$ analizziamo una riga a caso di $\dot{x}(t)$. Abbiamo

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1} x_1(t) + a_{i2} x_2(t) + \ldots + a_{in} x_n(t) + b_{i1} u_1(t) + b_{i2} u_2(t) + \ldots + b_{ip} u_p(t)$$

I termini $x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)$ sono $\mathcal{L}$-trasformabili $\Rightarrow$ anche $\dot{x}(t)$

Supponiamo:
- $X(s) = \mathcal{L}[x(t) \cdot \delta_{-1}(t)] \longrightarrow$ perché esista deve esistere la trasformata di $e^{At}x_0 \Rightarrow \exists \mathcal{L}[e^{At}\delta_{-1}(t)]$? sì: $e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T \Rightarrow$
- $U(s) = \mathcal{L}[u(t) \delta_{-1}(t)]$
- $Y(s) = \mathcal{L}[y(t) \cdot \delta_{-1}(t)]$

$\Rightarrow \exists \mathcal{L}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T\right) \cdot \delta_{-1}(t)\right]$, con ascissa di convergenza $\alpha \mid Re(s) > \sup\{Re(\lambda_i)\}$

Abbiamo

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x_0 \\ \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = A \cdot X(s) + BU(s) \end{cases} \Rightarrow sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \Rightarrow s\,X(s) - AX(s) = x_0 + BU(s)$$

quindi $(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$ con $(sI - A)$ invertibile poiché $\overset{> \Rightarrow \neq}{Re(s) \neq Re(\lambda_i)} \Rightarrow$

$$\boxed{X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} BU(s)}$$ TRASFORMATA DELLO STATO

nell'ipotesi di stato iniziale = 0 e ingresso = 0 si ricavano evoluzione lib e forz.

$\boxed{X_f(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)}$ $\boxed{X_{lib}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x_0}$ EVOLUZIONE FORZATA E LIBERA DELLO STATO

analogamente, avendo $Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$, si ha

$$\boxed{Y(s) = \underbrace{C \cdot (sI - A)^{-1} x_0}_{\text{USCITA LIBERA}} + \underbrace{[C \cdot (sI - A)^{-1} B + D]\, U(s)}_{\text{USCITA FORZATA}}}$$ EVOLUZIONE USCITA

scrivendo il sistema nella 2ª forma esplicita

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau) u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau) u(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} X(s) = \Phi(s)x_0 + H(s)U(s) \\ Y(s) = \Psi(s)x_0 + W(s)U(s) \end{cases}}$$

con
- $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$
- $H(s) = (sI - A)^{-1} B$
- $\Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$
- $W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \longrightarrow$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

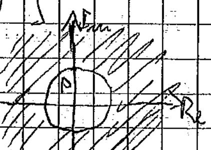
TRASFORMATA Z (equivalente Laplace, ma nel discreto)

Def Sia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una funzione con le seguenti proprietà
1) $f(t)=0 \quad \forall t<0$
2) $\exists\, p \in \mathbb{R} \mid \lim_{t\to\infty} \|f(t)\|^{\frac{1}{t}} = p < \infty$ con p = raggio di convergenza

allora $\exists\, z \in \mathbb{C},\ \|z\|>p,\ \mid \sum_{t=0}^{\infty} f(t)\cdot z^{-t} < \infty$ e si dice trasformata Zeta la funzione $F: \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}_p = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|>p\}$ con

$$\boxed{F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)\cdot z^{-t}}$$

nota: rappresentazione di $\mathbb{C}_p$ (codominio di z)



$f \to F$

PROPOSIZIONE 1: LINEARITÀ

f_1, f_2 due funzioni Z-trasformabili con raggi di convergenza p_1 e p_2, ed $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Allora $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ è Z-trasformabile con $p \le \max(p_1, p_2)$

$$F(z) = \lim_{m\to\infty}\left(\alpha_1 \sum_{t=1}^{m} f_1(t)\cdot z^{-t} + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m} f_2(t)\cdot z^{-t}\right) = \boxed{\alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z) = F(z)}$$

PROPOSIZIONE 2: RITARDO

f funzione Z-trasformabile, raggio p. Allora $g(t) = f(t-\Delta)$, $\Delta \in \mathbb{N}$, è Z-trasformabile con $\boxed{G(z) = F(z)\cdot z^{-\Delta}}$

Dim

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t)\cdot z^{-t} = \sum_{t=\Delta}^{\infty} f(t-\Delta)\, z^{-t}$$ (si parte da Δ poiché per $t<\Delta$ $f(t)=0$ essendo $\Delta \ge 0$)

cambio variabile: $t-\Delta = \tau$; $t = \tau+\Delta$; $t \to \ \Rightarrow \tau \to 0$

$$\to = \sum_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)\, z^{-\tau-\Delta} = z^{-\Delta} \sum_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)\, z^{-\tau} = F(z)\cdot z^{-\Delta}$$

PROPOSIZIONE 3: ANTICIPO

f Z-trasformabile, raggio p. Allora $g(t) = f(t+1)$ è Z-trasformabile con $G(z) = \boxed{Z[f(t+1)] = zF(z) - zf(0)}$

Dim

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t)\cdot z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t+1)\, z^{-t} = z \sum_{t=0}^{\infty} f(t+1)\, z^{-(t+1)} \Rightarrow$$ cambio variabile: $t+1 = \tau$; $t = \tau - 1$; $t \to 0 \Rightarrow \tau \to 1$

$$= z \sum_{\tau=1}^{\infty} f(\tau)\, z^{-\tau} = z\cdot\left(\sum_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)\, z^{-\tau} - f(0)\cdot z^{-0}\right) = zF(z) - z\cdot f(0)$$

PROPOSIZIONE 4: CONVOLUZIONE

$f_1, f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, si definisca convoluzione di f_1 e f_2 la funzione

$$f(t) = \sum_{\tau=0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)$$

$\hookrightarrow$ $\sum_{\tau=0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} f_1(t-\tau) f_2(\tau)$

Dim

$f(t) = \sum_{\tau=0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ cambio variabile: $\theta = t-\tau$, $\tau = t-\theta$, $\tau \to 0 \Rightarrow \theta \to t$, $\tau \to t \Rightarrow \theta \to 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{\theta=t}^{0} f_1(t-\theta) f_2(\theta) = \sum_{\tau=t}^{0} f_1(t-\tau) f_2(\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} f_1(t-\tau) f_2(\tau)$$

Date f_1, f_2 z-trasformabili con raggi ρ_1, ρ_2 ~~allora la funzione f~~ e trasformate F_1, F_2, allora la funzione f di convoluzione tra f_1 e f_2 è z-trasformabile e risulta $\boxed{F(z) = F_1(z) F_2(z)}$

Dim

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) z^{-t} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) z^{-t} =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} f_1(\tau) \cdot \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} f_2(t-\tau) z^{-t}}_{\text{trasf. RITARDO}} = \sum_{\tau=0}^{\infty} f_1(\tau) \cdot F_2(z) \cdot z^{-\tau} = F_2(z) \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} f_1(\tau) \cdot z^{-\tau} = F_2(z) \cdot F_1(z)$$

PROPOSIZIONE 5: TRASFORMATA DI $f(t) \cdot \lambda^t$

sia f una funzione z-trasformabile con raggio ρ_f. Allora $g(t) = f(t) \cdot \lambda^t$ è z-trasformabile con raggio $\rho_g = \|\lambda\| \rho_f$ e risulta $\boxed{G(z) = F\left(\frac{z}{\lambda}\right)}$

Dim

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t) \cdot z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot \lambda^t \cdot z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot \alpha^{-t} = F(\alpha) = F\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

PROPOSIZIONE 6: TRASFORMATA $t \cdot f(t)$

Sia f z-trasformabile con raggio ρ. Allora $g(t) = t \cdot f(t)$ è z-trasformabile con raggio ρ e trasformata $G(z) = -z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$

Dim

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot z^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} f(t) \cdot z^{-t} + f(0); \quad \frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{t=1}^{\infty} f(t) \cdot z^{-t}\right) =$$

togliamo lo zero per non avere $z^k = z^{k-1}$ con $z^k = z^0 = 1 \Rightarrow d(1) = 0$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} f(t) \cdot \frac{dz^{-t}}{d} = \sum_{t=1}^{\infty} f(t) \cdot (-t) \cdot z^{-t-1} = -\sum_{t=1}^{\infty} f(t) \cdot t \cdot z^{-1} \cdot z^{-t} = -z^{-1} \sum_{t=1}^{\infty} t f(t) \cdot z^{-t} =$$

$$= -z^{-1} \cdot \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t) \cdot z^{-t}}_{=G(z)} \Rightarrow -z^{-1} \cdot G(z) = \frac{dF(z)}{d(z)} \Rightarrow G(z) = -z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$$

PROPOSIZIONE 7: TRASFORMATA DI $\frac{t^{(k)}}{k!} \cdot \lambda^{t-k}$

Def Si definisce polinomio fattoriale di ordine k, $k \geq 0$, indicato con $t^{(k)}$, la funzione $\begin{cases} t^{(k)} = t(t-1)\cdot(t-2)\cdot \ldots \cdot (t-k+1)\cdot \delta_{-1}(t) \\ t^{(0)} = \delta_{-1}(t) := \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases} \end{cases}$

Data $f(t) = \frac{t^{(k)}}{k!} \cdot \lambda^{t-k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$, la funzione è z-trasformabile con raggio di convergenza $\rho = \|\lambda\|$ e risulta $\boxed{F(z) = \frac{z}{(z-\lambda)^{k+1}}}$

Dim per induzione

- $k=0 \Rightarrow f(t) = \frac{t^{(0)}}{0!} \cdot \lambda^t = \delta_{-1}(t) \cdot \lambda^t \Rightarrow F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta_{-1}(t) \lambda^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-t} =$

$$= \frac{z/\lambda}{z/\lambda - 1} = \frac{z}{z-\lambda} \quad \text{vera}$$

- supposta vera per $k = \bar{k}$, dimostriamola per $\bar{k}+1$

$$f(t) = \frac{t^{(\bar{k}+1)}}{(\bar{k}+1)!} \cdot \lambda^{t-\bar{k}-1} = \frac{t^{(\bar{k})} \cdot (t-\bar{k})}{\bar{k}! \cdot (\bar{k}+1)} \cdot \lambda^{t-\bar{k}} \cdot \lambda^{-1} = \underbrace{\frac{t \cdot t^{(\bar{k})}}{\bar{k}! \, (\bar{k}+1)} \lambda^{t-\bar{k}} \cdot \lambda^{-1}}_{f_1} - \underbrace{\frac{\bar{k} \cdot t^{(\bar{k})}}{\bar{k}! \cdot (\bar{k}+1)} \lambda^{t-\bar{k}} \lambda^{-1}}_{f_2}$$

$$f(t) = f_1 + f_2 \Rightarrow F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

$$F_1(z) = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot \frac{t^{(\bar{k})}}{\bar{k}!} \lambda^{t-\bar{k}} \cdot \frac{\lambda^{-1}}{\bar{k}+1} \cdot z^{-t} = \frac{1}{\lambda(\bar{k}+1)} \sum_{t=0}^{\infty} t \underbrace{\frac{t^{(\bar{k})}}{\bar{k}!} \lambda^{t-\bar{k}}}_{=f(t)} z^{-t} = \frac{1}{\lambda(\bar{k}+1)} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} t\, f(t)\, z^{-t}}_{= -z \cdot \frac{dF(z)}{dz}}$$

$$\text{con } \frac{dF(z)}{dz} = d\left(\overset{\to \text{ per ipotesi}}{\frac{z}{(z-\lambda)^{\bar{k}+1}}}\right) / dz = \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1(z) = \frac{-(z+\lambda+z\bar{k})}{\lambda(\bar{k}+1)(z-\lambda)^{\bar{k}+2}}$$

$$F_2(z) = \sum_{t=0}^{\infty} - \frac{\bar{k} \cdot t^{(\bar{k})}}{\bar{k}!\,(\bar{k}+1)} \lambda^{t-\bar{k}} \cdot \lambda^{-1} z^{-t} = -\frac{\bar{k}}{\lambda(\bar{k}+1)} \sum_{t=0}^{\infty} \overbrace{\frac{t^{(\bar{k})}}{\bar{k}!} \lambda^{t-\bar{k}}}^{=f(t)} z^{-t} = -\frac{\bar{k}}{\lambda(\bar{k}+1)} \cdot \frac{z}{(z-\lambda)^{\bar{k}+1}}$$

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \ldots = \frac{z}{(z-\lambda)^{\bar{k}+2}} \quad \text{verificata}$$

PROPOSIZIONE 8: FUNZIONI VETTORIALI

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^m \Rightarrow F(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}[f_1(t)] \\ \mathcal{Z}[f_2(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{Z}[f_m(t)] \end{pmatrix}$$ con $f_i: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ z-trasformabile con raggio ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$

in caso di $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{m \times n}$ ogni componente avrà comunque il suo raggio $\rho_{i,j}$ $i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$

SISTEMI LINEARI TEMPO DISCRETO - Z

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t+1) = \Phi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^{t} H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) = \Psi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^{t} W(t-\tau)u(\tau) \end{cases}$$

Hp:
- $t_0 = 0$
- $X(z) = Z(x(t))$
- $X_i(z) = Z(x_i(t))$
- $U(z) = Z(u(t))$

1) $x(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{pmatrix} \Rightarrow Z(\underbrace{x(t+1)}_{\text{anticipo}}) = zX(z) - zx(0)$

2) $Ax(t) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1(t) & \dots & a_{1n}x_n(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1(t) & \dots & a_{nn}x_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow Z(Ax(t)) = \begin{pmatrix} a_{11}X_1(z) \dots a_{1n}X_n(z) \\ \vdots \\ a_{n1}X_1(z) \dots a_{nn}X_n(z) \end{pmatrix} = A \cdot X(z)$

quindi $zX(z) - z(x_0) = AX(z) + BU(z) \Rightarrow (zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \underbrace{z \cdot (zI-A)^{-1} \cdot x(0)}_{\text{TRAS. EV. LIBERA}} + \underbrace{(zI-A)^{-1}BU(z)}_{\text{TRASF. EV. FORZATA}}}$$

TRASFORMATA DELLO STATO

$$\boxed{Y(z) = \underbrace{zC(zI-A)^{-1}x_0}_{\text{TRASF. USC. LIBERA}} + \underbrace{[C(zI-A)^{-1}B + D]U(z)}_{\text{TRAS. US. FORZATA}}}$$

TRASFORMATA DELL'USCITA

$$\boxed{W(z) = C(zI-A)^{-1}B + D}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO