# RISPOSTA A REGIME
*caso t. continuo*

**Def** Si definisce risposta a regime permanente ad un assegnato ingresso $u$ la funzione del tempo - se esiste - alla quale tende l'uscita indipendentemente dallo stato iniziale.

Allo atto pratico questo significa dare un certo $u$ al sistema, lasciarlo evolvere per un $\Delta t$ abbastanza lungo, e vedere se si stabilizza rispetto ad una certa funzione del tempo $t$

$$y_t = y_\ell + y_f \Rightarrow \lim_{\Delta t \to \infty} y_\ell + y_f = y_r(t)$$

Nel dettaglio:

$$y(t) = C \cdot e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

Avere $\Delta t \to \infty$ porterebbe a dire $t \to +\infty$. Ma, per garantire l'indipendenza dallo stato iniziale, possiamo dire $t_0 \to -\infty$ ($\Rightarrow t - t_0 \to +\infty$)

$\Downarrow$

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \left( C \cdot e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \right)$$

Supponiamo:
- $D = 0$
- $A$ matrice ad autovalori distinti

Dobbiamo garantire l'esistenza di $y_r(t)$ $\to$ $y_{lib} = C \cdot e^{A(t-t_0)} x_0 \to 0$ ; $y_{for} = \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-t_0)} B \to$ convergere

1) $y_{lib}(t) = C \cdot e^{A(t-t_0)} x_0 \Rightarrow \lim_{t_0 \to -\infty} C \cdot e^{A(t-t_0)} x_0 =$

$= \lim_{t_0 \to -\infty} C \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} u_i \cdot c_i = 0 \Leftrightarrow$
- $C u_i = 0 \to$ modi non osservabili in uscita
- $C e^{\lambda_i k} u_i c_i = 0, \; k \to \infty \Rightarrow Re[\lambda] < 0 \to$ modi asintoticamente stabili

$\Downarrow$

**Prop** Condizione necessaria ma non sufficiente perché esista la risposta a regime permanente in un sistema è che i suoi modi osservabili siano asintoticamente stabili

$\Downarrow$

Nuova condizione: $A$ ha autovalori a parte reale negativa

2) $y_{for}(t) = \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \Rightarrow \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow$ supponiamo $u$ limitata: $\|u(t)\| \le \beta \;\; \forall t \in (-\infty; \infty)$. Inoltre sarà

$e^{A(t-t_0)} = e^{\lambda_1 (t-t_0)} u_1 v_1^T + \dots + e^{\lambda_n (t-t_0)} u_n v_n^T$ con $Re[\lambda] < 0 \Rightarrow \|e^{At}\| \le \underset{>0}{M} \cdot e^{\alpha t}$, $Re[\alpha] < 0$

$\Downarrow$

11

$$\lim_{t_0 \to \infty} \int_{t_0}^{t} C \cdot e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \leq \int_{-\infty}^{t} \|C\| \cdot M \cdot e^{\alpha(t-\tau)} \|B\| \cdot \beta\, d\tau \Rightarrow \text{cambio variabile}$$

$\cdot\, t-\tau=\theta \Rightarrow \tau = t-\theta$
$\cdot\, d\theta = -d\tau$
$\cdot\, \tau \to t \Rightarrow \theta \to 0$
$\cdot\, \tau \to -\infty \Rightarrow \theta \to +\infty$

$$= \int_{+\infty}^{0} \|C\| \cdot e^{\alpha\theta} \cdot \|B\| \cdot \beta \cdot (-d\theta) = \int_{0}^{\infty} \|C\| \cdot e^{\alpha\theta} \|B\| \cdot \beta\, d\theta =$$

$$= \lim_{t_0 \to -\infty} \|C\| \cdot \Gamma \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha(t-t_0)} - 1\right) \leq \|C\| \cdot \Gamma \cdot \left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

Abbiamo quindi verificato che l'integrale converge se l'ingresso è limitato

$\hookrightarrow$ perché $y_r(t)$ esista
- A ad autovalori distinti a parte reale negativa
- $u(t)$ limitato $\forall t$

Possiamo quindi ridare la definizione rispetto alla 2ª forma esplicita:

**Def** data $y(t) = \Psi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$ si definisce risposta a regime permanente rispetto ad una data $u$ la quantità

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} y(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$\downarrow$

**Lemma** Si definisce risposta transitoria del sistema la quantità

$$y_t(t) = y(t) - y_r(t)$$

note:
- risp. transitoria esiste solo nei sistemi che hanno risp. permanente
- ~~transitoria e permanente possono essere viste, rispettivamente, come parte della risposta libera ($\to 0$) e come la parte "persistente" della risposta forzata~~

**Teo** Dato un sistema lineare, stazionario, t. continuo avente risposta a regime, si avrà che per un ingresso del tipo $u(t) = \gamma \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ la risposta a regime, detta risposta armonica, sarà $y_r(t) = \Gamma(\omega)\gamma \operatorname{sen}(\omega t + \theta + \varphi(\omega))$

**Dim**
$$\lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau) \cdot \gamma \operatorname{sen}(\omega\tau+\theta)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau) \cdot \gamma \cdot \frac{e^{i(\omega\tau+\theta)} - e^{-i(\omega\tau+\theta)}}{2i}\, d\tau =$$

$$= \frac{\gamma}{2i}\int_{-\infty}^{t} W(t-\tau) e^{i\omega\tau} e^{i\theta} d\tau - \frac{\gamma}{2i}\int_{-\infty}^{t} W(t-\tau) e^{-i\omega\tau} \cdot e^{-i\theta} d\theta =$$

$$= e^{i\theta} \cdot \frac{\gamma}{2i}\int_{-\infty}^{t} W(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau - e^{-i\theta}\frac{\gamma}{2i}\int_{-\infty}^{t} W(t-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{cambio var.}$$

$\cdot\, t-\tau=\theta \Rightarrow \tau = t-\theta$
$\cdot\, d\theta = -d\tau$
$\cdot\, \tau \to -\infty \Rightarrow \theta \to +\infty$
$\cdot\, \tau \to t \Rightarrow \theta \to 0$

$$\Rightarrow e^{i\theta}\frac{\gamma}{2i}\int_{0}^{+\infty} W(\theta) \cdot e^{i\omega(t-\theta)} d\theta - e^{-i\theta}\frac{\gamma}{2i}\int_{0}^{+\infty} W(\theta) e^{-i\omega(t-\theta)} d\theta =$$

$$= e^{i\theta} \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{\gamma}{2i} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} W(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta}_{\hookrightarrow \text{ Laplace con } s = i\omega} - e^{-i\theta}\frac{\gamma}{2i} e^{-i\omega t} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} W(\theta) e^{-i\omega(-\theta)} d\theta}_{\Rightarrow \text{ Laplace con } s = -i\omega} \Rightarrow$$

$$= W(i\omega)\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{i\theta}\cdot\frac{\gamma}{2i} - W(-i\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot e^{-i\theta}\frac{\gamma}{2i} =$$

$$= \frac{\gamma}{2i}\left(W(i\omega)e^{i(\omega t+\theta)} - W(-i\omega)e^{-i(\omega t+\theta)}\right) =$$

$\hookrightarrow W(s) = \|W(s)\|\cdot e^{i\angle W(s)} = M(\omega)\cdot e^{i\varphi(\omega)}$ con $M(\omega) = M(-\omega)$ f. pari; $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ f. dispari

$$= \frac{\gamma}{2i}M(\omega)\left(\underbrace{e^{i(\omega t+\theta)}\cdot e^{i\varphi(\omega)} - e^{-i(\omega t+\theta)}\cdot e^{i\varphi(-\omega)}}_{= 2i\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta+\varphi(\omega))}\right) =$$

($e^{i\varphi(-\omega)} = e^{-i\varphi(\omega)}$)

$$= \boxed{M(\omega)\cdot\gamma\cdot\mathrm{sen}(\omega t+\theta+\varphi(\omega)) = y_R(t)} \quad \text{per } u(t) = \gamma\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$$

Quindi $y_R(t)$:
- è dello stesso tipo di $u(t)$
- ha modulo ~~ex~~ uguale a $|W|\cdot|u|$
- ha fase uguale a $\angle W + \angle u$
- ha pulsazione pari alla pulsazione di $u$

CARATTERISTICHE RISPOSTA ARMONICA

Dimostrazione nel discreto

La dimostrazione è identica; ma, ~~poiché~~ quando si dovrebbe fare la trasformata di Laplace (in questo caso $z$) $\to \left(e^{i(\omega t+\theta)}\frac{\gamma}{2i}\cdot\sum_{\theta=0}^{+\infty}W(\theta)\cdot e^{-i\omega\theta} - e^{-i(\omega t+\theta)}\frac{\gamma}{2i}\sum_{\theta=0}^{+\infty}W(\theta)e^{i\omega\theta}\right)$,

si pone $e^{i\omega} = z$, $e^{-i\omega} = z$ $\to$ si ottiene la trasformata $z$ calcolata in $z = e^{\pm i\omega}$ (con $Re[z^+] = Re[z^-]$) e si sviluppa allo stesso modo

Riassunto

Def: se $\exists \to y_{R(A)} = \lim_{t_0\to-\infty} y(t)$ con $t_0\to-\infty \Rightarrow y_e\to 0 \Rightarrow Re[\lambda_i] < 0\ \forall\lambda_A$; $\|u(t)\|\le\beta\ \forall t \to t_0\to-\infty \Rightarrow y_f \to K < \infty$

$\Downarrow$

$y_R(t) = \lim_{t_0\to-\infty}\int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$

Def $y_T(t) = y(t) - y_R(t)$

Def Dato $S$ sistema con $Re[\lambda_i] < 0\ \forall\lambda_A \to y$ armonica con $u(t) = \gamma\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$