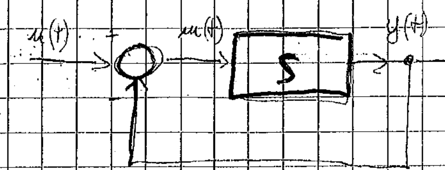
# NYQUIST




sistema retroazionato: $\tilde{u}(t) = u(t) - y(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\tilde{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \quad , \quad D=0 \end{cases}$$

$$B\cdot \tilde{u}(t) = B(u(t)-y(t)) = B(u(t) - Cx(t)) = Bu(t) - BCx(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) - BCx(t) = \begin{cases} \overbrace{(A-BC)}^{\bar{A}}\, x(t) + Bu(t) = \dot{x}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Ora vogliamo trovare una relazione tra il polinomio caratteristico del sistema a ciclo aperto ($d_{AP} = \det(sI - A)$) e del sistema a ciclo chiuso ($d_{CH} = \det(sI - (A-BC)) = \det(sI - A + BC)$).

Abbiamo $\det(sI - A + BC) = \det((sI - A)\cdot \overset{?}{K})$

↳ $(sI-A)\cdot K = (sI-A) + BC$

$$\Downarrow$$

$$I\cdot K = (sI-A)^{-1}\cdot[(sI-A)+BC]$$

$$\Downarrow$$

$$K = I + (sI-A)^{-1}BC$$

$$\overbrace{\det(sI-A+BC)}^{d_{CH}} = \det((sI-A)\cdot(I+(sI-A)^{-1}BC)) =$$

$$= \underbrace{\det(sI-A)}_{d_{AP}}\cdot \det(I + (sI-A)^{-1}BC)$$

↳ $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$ teorema Binet

$\Rightarrow d_{CH} = d_{AP}\cdot \det(I + (sI-A)^{-1}BC)$

$\det(I + (sI-A)^{-1}BC) =$
$= \det(I + \underbrace{C\cdot(sI-A)^{-1}B}_{})$ $\Leftarrow$ (Lemma $\det(I_{n\times n} + PQ) = \det(I_{m\times m} + QP)$ con $Q = m\times n$ $P = n\times m$)

↳ $W_{AP}(s)$ → f. trasferimento di S a ciclo aperto

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d_{CH}}{d_{AP}} = 1 + W_{AP}(s)}$$

se $q=p=1$

(sarebbe $\frac{d_{CH}}{d_{AP}} = \det(I + W_{AP})$
↳ $q\times p$, $q=p$ ($q$ = ingressi, $p$ = uscite))

Nyquist ha cercato di studiare la stabilità del sistema chiuso graficando la f. di trasf del sistema a ciclo aperto $W_{AP}$. Ma studiare $W_{AP}(s)$ equivale a studiare $\frac{d_{CH}}{d_{AP}}$

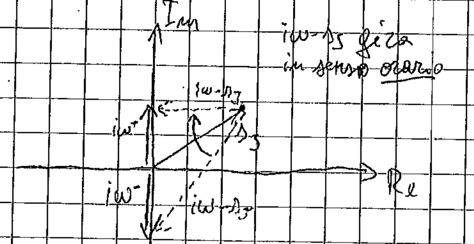
Entrambi ($d_{CH}$ e $d_{AP}$) sono polinomi.

$$p(s) = K(s-s_1)^{r_1}(s-s_2)^{r_2} \cdots (s-s_n)^{r_n}$$

1) dato $s = i\omega$, consideriamo la $j$-esima radice $s_j$ a parte reale $\geq 0$.

$$p(s) = p(i\omega) = i\omega - s_j$$

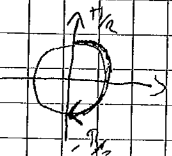
Nel piano vettoriale, dato che $s_j$ e $i\omega$ sono vettori, abbiamo




Il punto $i\omega$, per $\omega: -\infty \to +\infty$, percorre tutto l'asse immaginario $\Rightarrow$ il vettore $i\omega - s_j$ compie quindi una rotazione da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ in totale di $\pi$

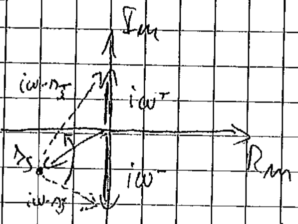
$\omega: -\infty \to +\infty$

$$\arg_{\omega \to \pm\infty}(i\omega - s_j) = \pm\frac{\pi}{2} \to$$




$\Delta\varphi = -\pi$

2) $s_j \mid Re(s_j) < 0$




$i\omega - s_j$ gira in senso antiorario

$\Delta\varphi = \pi$

i segni + e − sono presi per convenzione: per giri orari ($\Rightarrow Re(s_j) > 0$) $\Rightarrow$ contributi negativi, per giri antiorari $\Rightarrow$ contributi positivi ($\Rightarrow Re(s_j) < 0$)

Supponiamo quindi che il polinomio, avente $n$ radici, ne abbia $n_p$ positive ed $n - n_p$ negative (parte reale). Allora

$$\Delta\varphi_{p(s)} = n_p(-\pi) + (n - n_p)\pi = (n - 2n_p)\pi$$

Sia $d_{CH}$ che $d_{AP}$ sono vettori: $\frac{d_{CH}}{d_{AP}} = \frac{|d_{CH}|}{|d_{AP}|} \cdot \frac{e^{\varphi_{d_{CH}}}}{e^{\varphi_{d_{AP}}}} \to = \left|\frac{d_{CH}}{d_{AP}}\right| \cdot e^{\varphi(d_{CH} - d_{AP})}$

Messi in rapporto le loro fasi si sottraggono $\Rightarrow$ indicate con

- $Z_{CH}$ = zeri con $Re > 0$ di $d_{CH}$ (numeratore)
- $Z_{AP}$ = zeri " " " " $d_{AP}$ (denominatore)

si ha

$$\Delta\varphi_{\frac{d_{CH}}{d_{AP}}} = \overbrace{n\pi - 2Z_{CH}\pi}^{\Delta\varphi_{d_{CH}}} - (\overbrace{n\pi - 2Z_{AP}\pi}^{\Delta\varphi_{d_{AP}}}) = (Z_{AP} - Z_{CH}) \cdot 2\pi$$

NUMERO DI GIRI IN SENSO ANTIORARIO CHE FA LA FASE DI $\frac{d_{CH}}{d_{AP}}$

ma $Z_{AP}-Z_{CH}$ è anche il numero di giri della fase di $(1+W_{AP}(s))$

⇓

## CRITERIO DI NYQUIST

Un sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile se il numero di giri che $1+W_{AP}(s)$ ($W_{AP}(s)$ funzione di trasferimento dello stesso sistema a ciclo aperto) compie in senso antiorario intorno all'origine (ovvero che $W_{AP}(s)$ compie intorno a $(-1;0)$) è uguale al numero di radici a $Re\geq 0$ del polinomio caratteristico del sistema a ciclo aperto

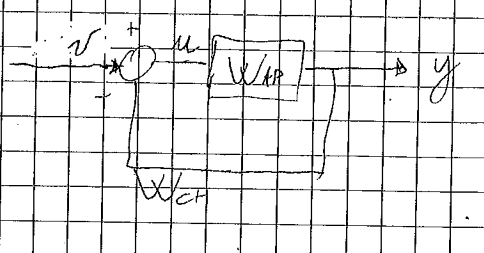
Ovvero

CH asint. STABILE $\Leftrightarrow \boxed{N=Z_{AP} \Leftrightarrow Z_{CH}=0} \rightarrow$

~~Nel dominio di Laplace~~

~~funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso~~

$$\begin{cases} Y(s)=W_{AP}(s)\cdot U(s) \\ U(s)=V(s)-Y(s)\end{cases} \Rightarrow$$




$$\Rightarrow Y(s)=W_{AP}(s)(V(s)-Y(s))$$

$$Y(s)(I+W_{AP}(s))=W_{AP}(s)\cdot V(s)$$

$$\boxed{Y(s)=\underbrace{\frac{W_{AP}(s)}{1+W_{AP}(s)}}_{=W_{CH}(s)}\cdot V(s)}$$ caso scalare

$$\boxed{Y(s)=\underbrace{(I+W_{AP}(s))^{-1}\cdot W_{AP}(s)}_{=W_{CH}(s)}V(s)}$$ caso vettoriale

Ma perché se $z_{CH} > 0 \Rightarrow S'_{retroazionato}$ è stabile?

Semplice: $S'$ stabile (asint. stabile) $\Leftrightarrow Re[\lambda] \leq 0$ $(Re[\lambda] < 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_{CH}$ sono gli zeri ($\rightarrow$ autovalori) a parte reale $> 0$

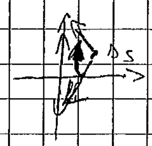
# RIASSUNTO NYQUIST

$$\begin{cases}\dot x(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases},\ u=u-y \Rightarrow \begin{cases}\dot x(t)=(A-BC)x(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

$$\underbrace{\det(sI-A)}_{=d_{AP}}\cdot\det\left(I+(sI-A)^{-1}BC\right)=\underbrace{\det(sI-A+BC)}_{=d_{CH}}\ \xrightarrow[\text{scalare}]{\text{caso}}\ \frac{d_{CH}}{d_{AP}}=1+W_{AP}(s)$$

$d_{CH}: K(s-s_1)^{r_1}\cdots(s-s_m)^{r_m}=p(s)$ $\begin{cases} s=j\omega \\ \text{① considero le radici } s_j \mid Re[s_j]>0 \end{cases} \Rightarrow p_j(i\omega)=i\omega-s_j$

$\arg_{\omega\to\pm\infty}(i\omega-s_j)=\pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \underbrace{\Delta\varphi=-\pi}_{\text{orario}}$




② $s_j \mid Re[s_j]<0 \Rightarrow \Delta\varphi=-\pi$ antiorario

$n$ radici di $p$ $\begin{cases} n_p \text{ a p.r.} >0 \\ n-n_p \text{ a p.r.} <0 \end{cases}$ $\Delta\varphi=n_p(-\pi)+(n-n_p)\pi=(n-2n_p)\pi$

$$\angle\frac{d_{CH}}{d_{AP}}=\underset{n_p=z_{CH}}{\angle d_{CH}}-\underset{n_p=z_{AP}}{\angle d_{AP}}=n\pi-2z_{CH}\pi-(n\pi-2z_{AP}\pi)=(z_{AP}-z_{CH})\cdot 2\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1+W_{AP}(s)$ fa $z_{AP}-z_{CH}$ giri intorno all'origine

CRITERIO

Se $z_{CH}=0 \Rightarrow N=z_{AP} \Rightarrow$ Sistema retroazionato STABILE
(= si dice che $\nexists$ zeri, ovvero autovalori, a parte reale maggiore di zero)

Inoltre $W_{CH}(s)=\dfrac{W_{AP}(s)}{1+W_{AP}(s)}$

# STABILITÀ

Def $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)})$ → $\dot x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ; $\dot x(t) = f(x(t), u(t))$

$x_e$ è punto di equilibrio se dato $x(t_0) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e \ \forall t \geq t_0$ con $u=0$, ovvero $\varphi(t, t_0, x_e, 0) = x_e \ \forall t \geq t_0 \Rightarrow \dot x(t) = f(x_e, 0) = 0$

Un punto di equilibrio può essere

- stabile se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{(\varepsilon,t_0)} > 0 \mid \forall x(t_0) \to \|x_e - x(t_0)\| < \delta_{(\varepsilon,t_0)} \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \ \forall t \geq t_0$
  ↳ raggio sferoide
- attrattivo se $\exists \delta > 0 \mid \forall x(t_0) \to \|x_e - x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$
- asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo

Supposto $u=0$

$\dot x(t) = Ax(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \Rightarrow$ l'origine è sempre punto di equilibrio;

STABILITÀ ORIGINE

cont [sarà stabile $\Leftrightarrow Re[\lambda_A] \le 0 \ \forall \lambda_A$ ; asintoticamente stabile $\Leftrightarrow Re[\lambda_A] < 0 \ \forall \lambda_A$]

Se
- $\det(A) \neq 0 \to$ un solo punto di eq
- $\det(A) = 0 \to$ infiniti punti di eq ($Null(A)$ = sottospazio $V \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$)

disc [stabile $\Leftrightarrow \|\lambda_i\| \le 1$ ; asint. stab $\Leftrightarrow \|\lambda_i\| < 1$]

## Sistemi non lineari: equilibrio

dato $\dot x(t) = f(x(t), u(t)) = f(x(t)) + g(x(t))\cdot u(t) \Rightarrow x_e$ è punto di eq ($f(x_e)=0$)

$\Rightarrow x(t) - x_e = \varepsilon(t)$, ovvero un $\varepsilon$ funzione di $t \to \varepsilon(0) = x_0 - x_e$

## METODO LINEARIZZAZIONE

$$\dot\varepsilon(t) = J(x_e)\,\varepsilon(t) + g(x_e)\cdot u(t) \quad \text{con} \quad J(x_e) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_e}$$

↳ $x_e$ è
- stabile se $Re[\lambda_{Jx_e}] \le 0 \ \forall \lambda$
- asint. stabile se $Re[\lambda_{Jx_e}] < 0 \ \forall \lambda$