Prof. Ing. **ANTONIO RUBERTI**
dell'Università di Roma

Prof. Ing. **ALBERTO ISIDORI**
dell'Università di Roma

ELEMENTI DI TEORIA DEI SISTEMI

Per il corso di Controlli Automatici

Edizioni Scientifiche SIDEREA

Per illustrare questo aspetto si consideri, ad esempio, un motore in corrente continua ad eccitazione separata.

Siano (cfr. fig.I.3) v_e, v_a le tensioni applicate rispettivamente ai circuiti di eccitazione e di armatura, θ la posizione angolare dell'asse rispetto ad un prefissato riferimento, Ω la sua velocità angolare e C la coppia motrice sviluppata. In questo tipo di oggetto si possono avere varie forme di intervento (o di controllo): in particolare si può considerare il caso in cui v_a viene mantenuta costante ed il controllo si effettua attraverso v_e (controllo sull'eccitazione) e quello in cui i ruoli di queste grandezze sono invertiti (controllo sull'armatura). Anche per quanto riguarda la scelta delle uscite, in relazione alle diverse applicazioni, possono essere di interesse la sola posizione, o la sola velocità, o la sola coppia o anche più di una di queste grandezze. Ad ognuna delle scelte prospettate per gli ingressi e per le uscite corrisponde un diverso sistema astratto orientato, che sarà caratterizzato da una specifica relazione matematica.

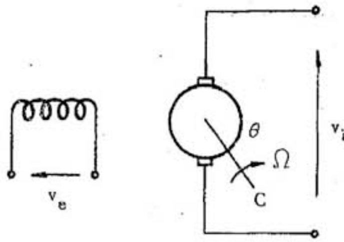

Fig.I.3

I.2 - Generalità del concetto di sistema.

Il concetto di sistema astratto, introdotto nel paragrafo precedente, è molto generale. In proposito, con riferimento agli enti matematici che, come si è detto in termini informali, costituiscono un sistema astratto orientato, è sufficiente osservare innanzitutto che si può avere più di una variabile di ingresso e più di una variabile di uscita (sistemi con ingresso ed uscita multidimensionali), che nella variazione di tali grandezze col tempo possono intervenire i valori assunti ad ogni istante (sistemi a tempo continuo) ovvero solamente in istanti intervallati (sistemi a tempo discreto), che non ci sono limitazioni a priori sulle classi di funzioni del tempo considerate per rappresentare gli andamenti degli ingressi e delle uscite nè sulle relazioni tra esse.

Dalla generalità del concetto di sistema emerge chiaramente l'importanza del ruolo unificante che esso può avere nei più diversi settori, sia dal punto di vista scientifico, sia dal punto di vista applicativo. Già la breve esemplificazione introdotta nel paragrafo precedente ha messo in luce come il punto di vista sistemistico si possa adottare, oltre che

nello studio del comportamento di oggetti artificiali, anche per l'analisi di processi naturali. In effetti però va osservato che il concetto di sistema può essere utilizzato per interpretare il comportamento di qualsiasi fenomeno (economico, sociologico, ecc.) ed anche processi che per loro natura sono già astratti (procedimenti di calcolo, ecc.).

A titolo di esempio si consideri il processo di controllo dell'accrescimento del capitale attraverso la variazione del tasso di interesse. In tale processo si può considerare come variabile di ingresso il tasso, u, di interesse e come variabile di uscita l'ammontare, y, del capitale. Sia inoltre $\{T, 2T, 3T, \dots\}$ la successione di istanti di tempo nei quali si considerano le variabili u ed y. La relazione matematica tra queste può essere interpretata con l'equazione:

$$y(kT+T) = [1 + u(kT)]\, y(kT) \tag{I.3}$$

nella quale k è intero. Risulta così definito un sistema astratto orientato con ingresso u ed uscita y, caratterizzato dalla equazione (I.3).

Come altro esempio si consideri il procedimento di Newton per la soluzione della equazione $f(y) = 0$.

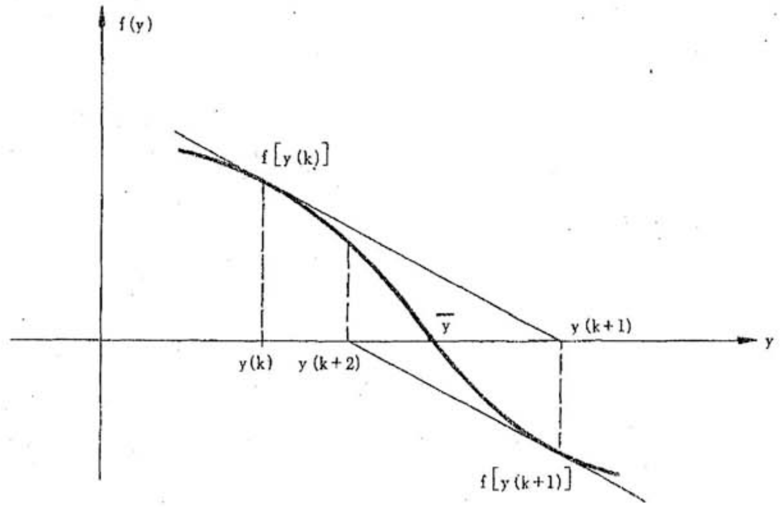

Fig.I.4

Il metodo, come è ben noto, consiste nel cercare una soluzione $\bar{y}$ attraverso una successione di valori $\{\dots, y(k), y(k+1), y(k+2), \dots\}$ ad essa convergente. Tale successione si costruisce con la seguente regola (cfr. fig.I.4): a partire da un valore $y(k)$ si determina $y(k+1)$ come intersezione con l'asse delle ascisse della tangente alla curva con il punto di ascissa $y(k)$. Si ha quindi:

$$y(k+1) = y(k) - \frac{f\,[y(k)]}{f'\,[y(k)]} \tag{I.4}$$

avendo indicato con $f'[y(k)]$ la derivata df/dy calcolata in $y = y(k)$.

A questo procedimento di calcolo si può associare un sistema in cui l'ingresso sia identicamente nullo e l'uscita sia la variabile y. In questo modo l'algoritmo viene interpretato come un sistema in evoluzione libera (ingresso pari a zero), a tempo discreto, caratterizzato dalla equazione (I.4).

Per concludere queste osservazioni si vuole sottolineare il fatto che la possibilità di interpretare in un unico contesto, quello sistemistico, fenomeni e processi così diversi non solo offre il vantaggio di un linguaggio comune a specialisti di diversi settori ma è anche di notevole interesse dal punto di vista della utilizzazione più vasta di metodologie e risultati sviluppati in un particolare settore. Così, ad esempio, nello studiare il fenomeno del controllo dell'accrescimento del capitale attraverso il tasso di interesse, si possono utilizzare i risultati della teoria svolta per la classe di sistemi descritti dall'equazione non lineare (I.3) (sistemi bilineari, per i quali recentemente la teoria ha avuto notevoli sviluppi). Così, dall'esempio dell'algoritmo di Newton emerge la corrispondenza tra convergenza di algoritmi e stabilità dei sistemi a tempo discreto e quindi la possibilità non solo di una trattazione unificata, ma anche di mutuare metodi dall'un campo all'altro.

I.3 - Concetto di stato.

Un sistema astratto orientato è caratterizzato da una relazione tra due classi di funzioni, rappresentative della variazione nel tempo degli ingressi e, rispettivamente, delle uscite. Si supponga di iniziare ad osservare il sistema ad un istante t_0 arbitrario e sia $u\,|_{[t_0,\infty)}$ un possibile andamento dell'ingresso per tutti gli istanti $t \geq t_0$. A tale andamento della grandezza di ingresso, la relazione che caratterizza il sistema in generale fa corrispondere diversi possibili andamenti della grandezza di uscita per $t \geq t_0$. Ciò può essere immediatamente constatato considerando l'esempio di fig.I.1: in questo caso, assegnato l'andamento della tensione v per $t \geq t_0$ si hanno infiniti andamenti possibili per le correnti i_1, i_2, i_c per $t \geq t_0$, ciascuno individuato dalla carica pre-

sente sul condensatore all'istante t_0. In altri termini, come è ben noto, per individuare le uscite univoche correnti occorre fissare, oltre all'ingresso, anche *le condizioni iniziali.* La stessa considerazione si può ovviamente ripetere per ciascuno degli altri esempi considerati, identificando come condizione iniziale il capitale all'istante iniziale, il punto iniziale dell'algoritmo, ecc.

Da questi stessi esempi emerge la possibilità di individuare univocamente, attraverso le condizioni iniziali, l'uscita corrispondente ad un prefissato ingresso. L'univocità di una tale corrispondenza è una esigenza importante nello studio dei sistemi, una delle cui finalità fondamentali è appunto quella di consentire la determinazione dell'andamento dell'uscita una volta che sia assegnato quello dell'ingresso. Questa esigenza di univocità, attraverso la generalizzazione del concetto di condizione iniziale, porta ad introdurre il concetto di *stato*. Per darne una prima definizione, sia pure informale, conviene limitare la classe dei sistemi considerati ai cosiddetti sistemi *causali*, nei quali l'uscita ad ogni prefissato istante $\bar{t}$ dipende dai valori assunti dall'ingresso ad istanti di tempo $t \leq \bar{t}$ e non dai valori assunti per $t > \bar{t}$. Per tali sistemi si può dire che lo *stato* all'istante t_0 costituisce l'insieme delle informazioni necessarie per consentire la determinazione univoca della uscita ad un prefissato istante $t \geq t_0$, una volta noti i valori dell'ingresso sull'intervallo $[t_0, t]$. È bene osservare che, data la arbitrarietà dell'istante t_0, lo stato assume il carattere di una vera e propria variabile ausiliaria, che si aggiunge a quelle di ingresso e di uscita.

L'andamento di tale variabile presenta una particolare proprietà di consistenza tra i valori assunti in istanti diversi. Per illustrare questo importante punto si consideri ancora l'esempio di fig.I.1: in questo caso, lo stato ad ogni istante è identificabile come il valore della carica presente sul condensatore. È chiaro che la carica all'istante t_0 dipende dalle vicissitudini del circuito intervenute per tutti gli istanti $t \leq t_0$; in più si ha però che la carica ad un istante $t_0' > t_0$ dipende soltanto dalla carica a t_0 e dall'andamento dall'ingresso intervenuto sull'intervallo $[t_0, t_0']$. In altri termini lo stato all'istante t_0 esercita, ai fini della determinazione dello stato stesso in istanti successivi, ancora il ruolo esercitato ai fini della determinazione dell'uscita. Questa è una proprietà importante che si aggiunge a quella di univocità e che si ritroverà nel seguito come essenziale nella definizione rigorosa di stato (cfr., nel paragrafo I.5, la proprietà di separazione).

Prima di concludere queste considerazioni si ritiene utile sottolineare che, a differenza delle grandezze di ingresso e di uscita, lo stato può essere associato ad un assegnato sistema astratto in infiniti modi diversi. Così, ad esempio, è chiaro che per il caso di fig.I.1 si può assumere come stato qualunque grandezza proporzionale alla carica del condensatore (in particolare la tensione ai suoi capi). In casi più generali si possono assumere come stato anche grandezze che non hanno diretta interpretazione nel contesto dell'oggetto o fenomeno al quale il sistema è associato. In altri termini lo stato è solo una grandezza ausiliaria che risponde all'esigenza di rendere univoca la determinazione dell'uscita.

I.4 - Definizione di sistema.

In questo paragrafo e nei successivi si useranno sistematicamente alcuni concetti fondamentali e notazioni di teoria degli insiemi, che, per comodità del lettore, sono riportati nell'Appendice I.1. Per una lettura agevole è presupposta una adeguata padronanza di tali concetti e notazioni.

Il problema di dare una definizione precisa di sistema presenta molteplici difficoltà e per risolverlo si possono assumere varie posizioni. Queste si differenziano in rapporto al livello di generalità al quale ci si vuol riferire, al rigore che si vuol adottare, alla più o meno diretta utilizzabilità della definizione stessa per classi di sistemi per i quali la teoria si voglia o si possa sviluppare. In queste dispense viene adottata una definizione abbastanza generale, sufficiente a comprendere quelle classi di sistemi usualmente presi in esame nella teoria dei controlli automatici, nella teoria dei circuiti, ecc. e che spesso vengano raggruppati sotto la direzione di sistemi *dinamici* (anche se questo aggettivo viene impiegato con significato non sempre univoco)(1).

Delimitato così il contesto nel quale ci si colloca, va osservato che le diverse definizioni di sistema che vengono date sono sostanzialmente basate o sulla sola considerazione delle grandezze terminali di ingresso e di uscita (il cosidetto approccio ingresso-uscita) o sulla considerazione, accanto a tali grandezze, anche dello stato (il cosidetto approccio ingresso-stato-uscita). In questo paragrafo ci si riferirà alla prima delle due possibilità.

In proposito, considerato un sottoinsieme ordinato T dell'insieme R dei numeri reali ed indicato con $T(t_0)$ il sottoinsieme $\{t : t \in T, t \geq t_0\}$, si può dare la seguente:

(1) - Per valutare la collocazione della teoria dei sistemi dinamici rispetto alla cosidetta *teoria generale dei sistemi* o ad altre sue branche, si rinvia in particolare al Capitolo II del testo [G.1] della Bibliografia riportata alla fine di questo Capitolo.

Nelle definizioni che seguiranno si farà la tacita assunzione che il comportamento del sistema non presenti alcun fenomeno di casualità. In altre parole, si tratteranno i sistemi cosiddetti *deterministici*; tuttavia non è difficile estendere la definizione ai sistemi cosiddetti *probabilistici* o *stocastici*, nei quali, ad ogni istante t, le grandezze di ingresso e di uscita ed il legame tra esse sono definite attraverso misure di probabilità.

Definizione I.1. Dato un sottoinsieme ordinato T dell'insieme R dei numeri reali e due insiemi arbitrari non vuoti U ed Y, si dice sistema astratto orientato un insieme di relazioni:

Prodotto cartesiano

$$(I.5)\qquad \mathcal{S} = \{\mathcal{S}(t_0) : \mathcal{S}(t_0) \subset (U^{T(t_0)} \times Y^{T(t_0)}),\ t_0 \in T\}$$

Def. di sist.

tale che sia verificata la seguente proprietà (*chiusura rispetto al troncamento*)

$$(I.6)\qquad \left|\begin{array}{l} (u_0, y_0) \in \mathcal{S}(t_0) \implies (u_0|_{T(t_1)}, y_0|_{T(t_1)}) \in \mathcal{S}(t_1) \\ \forall t_0 \in T, \quad \forall (u_0, y_0) \in \mathcal{S}(t_0), \quad \forall t_1 \in T : t_1 \geq t_0 \end{array}\right. \quad \triangleleft$$

Per il sistema così definito, T viene detto insieme dei valori del tempo, U insieme dei valori della grandezza di ingresso e Y insieme dei valori della grandezza di uscita. Indicati con $D\mathcal{S}(t_0)$ ed $R\mathcal{S}(t_0)$ il dominio ed il codominio di ciascuna relazione $\mathcal{S}(t_0) \in \mathcal{S}$, l'insieme $\bigcup_{t_0 \in T} D\mathcal{S}(t_0)$ viene detto spazio delle funzioni di ingresso e l'insieme $\bigcup_{t_0 \in T} R\mathcal{S}(t_0)$ spazio delle funzioni di uscita.

Questa definizione, che si collega alle considerazioni svolte nei paragrafi precedenti a proposito del concetto di sistema, lo formalizza in realtà ad un livello più generale. Essa deriva dal pensare il sistema astratto come associato ad una collezione di esperimenti su una *scatola nera*: t_0 è l'istante nel quale si inizia una classe di esperimenti; $\mathcal{S}(t_0)$ è l'insieme di coppie ingresso-uscita che si ottengono con tali esperimenti; $\mathcal{S}$ individua la totalità delle coppie che si ottengono con queste classi di esperimenti facendo variare t_0 su T. L'unica condizione posta, di chiusura rispetto al troncamento, corrisponde alla esigenza, peraltro naturale, che per ogni coppia relativa ad un esperimento iniziato in t_0, restringendo (o troncando) le relative funzioni all'insieme $T(t_1)$ (con $t_1 > t_0$) si ottenga una delle coppie ingresso-uscita relative allo esperimento che inizia in t_1.

Va osservato che ad una generica relazione $\mathcal{S}(t_1)$ appartengono, in generale, più coppie ingresso-uscita di quelle che nascono dal troncamento di coppie appartenenti ad una relazione $\mathcal{S}(t_0)$ relativa ad un valore $t_0 < t_1$. Se ciò non si verifica, si ha a che fare con una classe particolare di sistemi, che si dicono *uniformi*. Formalmente si può dare la seguente:

Definizione I.2. Un sistema astratto orientato si dice uniforme se:

$$(I.7)\quad (u_1, y_1) \in \mathcal{S}(t_1) \Rightarrow \exists\, (u_0, y_0) \in \mathcal{S}(t_0) : (u_0|_{T(t_1)}, y_0|_{T(t_1)}) = (u_1, y_1)$$

$$\forall\, t_1 \in T \;,\; \forall\, (u_1, y_1) \in \mathcal{S}(t_1) \;,\; \forall\, t_0 \in T : t_0 < t_1 \qquad \triangleleft$$

È facile rendersi conto che tali sistemi possono essere descritti da una sola relazione, piuttosto che da un insieme di relazioni. Più precisamente per tali sistemi si può trovare una relazione:

$$(I.8)\qquad \mathcal{S}_{un} \subset (U^T \times Y^T)$$

che permette di rappresentare tutte le coppie del sistema $\mathcal{S}$ considerando, per ogni coppia $(u, y) \in \mathcal{S}_{un}$, i troncamenti relativi a tutti gli istanti $t_0 \in T$. In termini formali, ogni elemento $\mathcal{S}(t_0)$ di $\mathcal{S}$ si costruisce da $\mathcal{S}_{un}$ con la relazione:

$$(I.9)\qquad \mathcal{S}(t_0) = \{(u|_{T(t_0)}, y|_{T(t_0)}) : (u, y) \in \mathcal{S}_{un}\}$$

A questo punto, per sottolineare la differenza tra sistema uniforme e non, è utile considerare un esempio. Siano $T = R$, $U = Y = R$ e, per individuare le coppie ingresso-uscita, sia data l'equazione differenziale:

$$(I.10)\qquad a_1(t)\,\frac{dy(t)}{dt} + a_0(t)y(t) = b_1(t)\,\frac{du(t)}{dt} + b_0(t)\,u(t)$$

Ogni relazione $\mathcal{S}(t_0) \in \mathcal{S}$ sia definita dalle coppie di funzioni (u_0, y_0) che si ottengono risolvendo la (I.10) scegliendo in R la condizione iniziale all'istante t_0 e assumendo per $D\,\mathcal{S}(t_0)$ l'insieme delle funzioni continue su $[t_0, +\infty)$.

Si può ora considerare un primo caso, in cui i quattro coefficienti della (I.10) sono costanti; ogni soluzione relativa all'istante iniziale t_0 soddisfa all'equazione anche per ogni $t < t_0$ e ciò consente di considerare ogni coppia di $\mathcal{S}(t_0)$ come troncamento di una coppia appartenente ad una relazione $\mathcal{S}(t_1)$ con $t_1 < t_0$. In questo primo caso il sistema è dunque uniforme.

Come secondo caso si ponga:

$$(I.11)\qquad \begin{aligned} a_1(t) = b_1(t) &= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t < 0 \\ 1 & \text{per} \quad t \geq 0 \end{cases} \\ a_0(t) = b_0(t) &= \begin{cases} 1 & \text{per} \quad t < 0 \\ 0 & \text{per} \quad t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Questa volta per ogni istante iniziale $t_0 > 0$ esistono coppie in $\mathcal{S}(t_0)$ che non sono troncamento di coppie appartenenti alle relazioni $\mathcal{S}(t_1)$, con $t_1 < 0$. Ad esempio una generica coppia di funzioni costanti con valori diversi soddisfa all'equazione (I.10) se $t_0 \geq 0$ ma non quando $t_0 < 0$. Questo sistema è dunque non uniforme.

Un utile esercizio per il lettore può essere quello di esaminare tutti gli esempi considerati nei paragrafi I.1 e I.2 alla luce delle definizioni date in questo paragrafo.

I.5 - Definizione di stato.

Si tratta di introdurre in modo formale lo stato sulla base delle motivazioni già date nel paragrafo I.3. Si indichino con $(T \times T)^*$ l'insieme $\{(t, t') : (t, t') \in T \times T, t \geq t'\}$ e con $\mathcal{U}$ un insieme $\{u : u \in U^T\}$ tale che, comunque si scelgano un istante $t_0 \in T$ ed una coppia $(u_0, y_0) \in \mathcal{S}(t_0)$, esista una funzione $u \in \mathcal{U}$ tale che sia $u|_{T(t_0)} = u_0$. Si può dare allora la seguente:

Definizione I.3. Dato un sistema $\mathcal{S}$, un insieme di elementi X ne costituisce lo spazio di stato se esistono due funzioni:

$$(I.12)\qquad \varphi : (T \times T)^* \times X \times \mathcal{U} \to X$$

$$(I.13)\qquad \eta : T \times X \times U \to Y$$

tali che valgono le seguenti proprietà:

a) (copertura) per ogni $t_0 \in T$ l'insieme:

$$(I.14)\qquad \hat{\mathcal{S}}(t_0) = \{(u|_{T(t_0)}, y) : y(t) = \eta[t, \varphi(t, t_0, x_0, u), u(t)], u \in \mathcal{U}, x_0 \in X\}$$

coincida con il corrispondente elemento $\mathcal{S}(t_0)$ di $\mathcal{S}$;

b) (unicità e causalità):

$$(I.15)\qquad \varphi(t, t_0, x_0, u) = \varphi(t, t_0, x_0, u')$$

$$\forall\, (t, t_0) \in (T \times T)^* \;,\; \forall\, x_0 \in X \;,\; \forall\, u, u' \in \mathcal{U} : u|_{(t_0, t]} = u'|_{(t_0, t]}$$

c) (consistenza):

$$(I.16)\qquad \varphi(t, t, x_0, u) = x_0$$

$$\forall t \in T \ , \ \forall x_0 \in X \ , \ \forall u \in \mathcal{U}$$

d) (separazione):

$$\varphi(t, t_0, x_0, u) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0, u), u) \tag{I.17}$$

$$\forall (t, t_0) \in (T \times T)^* \ , \ \forall (t_1 \in (t_0, t) \ , \ \forall x_0 \in X \ , \ \forall u \in \mathcal{U} \qquad \lhd$$

La funzione φ viene detta *funzione di transizione dello stato* ed il suo valore viene considerato come *stato del sistema all'istante t*. Esso verrà perciò indicato con:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u|_{(t_0, t]}) \tag{I.18}$$

Tale relazione esprime dunque il valore assunto dallo stato del sistema all'istante t sotto l'azione dell'ingresso u, a partire dallo stato iniziale x_0 assunto all'istante $t_0 \leq t$.

La funzione η viene detta *trasformazione in uscita* e fornisce il valore dell'uscita all'istante t, in dipendenza dei valori assunti dallo stato e dall'ingresso al medesimo istante. Questo viene perciò indicato con:

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \tag{I.19}$$

Date la definizione formale di stato e la denominazione di funzioni e variabili che in essa compaiono, è utile sviluppare alcune considerazioni per rendere più agevole l'interpretazione.

Come primo fatto va osservato che al sistema individuato dalle coppie ordinate ingresso-uscita viene associata una variabile intermedia, lo stato appunto, che si evolve nello spazio X. Di conseguenza il passaggio dall'ingresso all'uscita risulta dalla composizione di una trasformazione ingresso-stato, in cui il valore dello stato ad un fissato istante dipende dall'evoluzione dell'ingresso su un intervallo di tempo (legame dinamico), e di una trasformazione in uscita nella quale si possono distinguere sia un legame indiretto dall'ingresso attraverso la dipendenza dallo stato e sia un legame diretto con il valore dell'ingresso al medesimo istante (legame istantaneo). Si vedano in proposito le (I.18) e (I.19). È chiaro che la variabile intermedia introdotta deve soddisfare sia alla finalità precipua per cui si introduce lo stato (rendere univoca la corrispondenza tra ingresso e uscita), sia ad opportune condizioni di consistenza.

La più ovvia di queste è quella che è stata chiamata proprietà di *copertura* e che, detta in termini informali, ha lo scopo di assicurare che ogni coppia ingresso-uscita del sistema $\mathcal{S}$ dato sia deducibile dalla trasformazione composta ingresso-stato-uscita e, viceversa, che quest'ultima non abbia introdotto nessuna nuova coppia.

La seconda proprietà riassume due esigenze che, per brevità di notazione, si sono tenute unite. In effetti, per *unicità*, come si è più volte detto, si intende il fatto che la conoscenza dello stato ad un istante t_0 e dell'ingresso per istanti successivi deve consentire la univoca determinazione dell'uscita da t_0 in poi. Grazie al fatto che la trasformazione in uscita è istantanea, questo comporta un vincolo solo sulla funzione di transizione dello stato, espresso dal fatto che i valori di u in istanti antecedenti all'istante t_0 non intervengono nel calcolo dei valori della funzione φ. Per *causalità* si intende, come si è già avuto occasione di dire, che l'uscita del sistema ad un istante t non dipende dai valori dell'ingresso per istanti successivi. Anche questa volta ne nasce un vincolo sulla φ e precisamente diventano non rilevanti i valori di u per istanti successivi a quello in cui si effettua il calcolo dello stato. Dalle due limitazioni sopra illustrate nasce la condizione b).

Per illustrare la proprietà di *separazione*, a proposito della quale si sono già anticipate alcune considerazioni nel paragrafo I.3, si consideri il caso in cui l'ingresso è unidimensionale ed abbia l'andamento, nel tempo, indicato in fig.I.5.

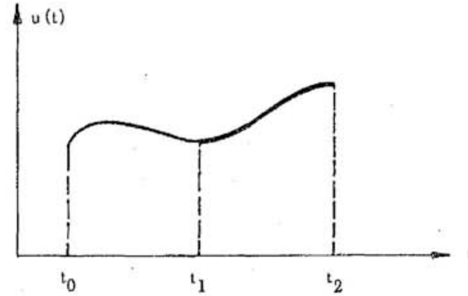

Fig.I.5

Siano inoltre x_0, x_1, x_2 gli stati ai tre istanti t_0, t_1, t_2. Lo stato x_2 è univocamente individuato dallo stato x_0 e dall'ingresso $u|_{(t_0, t_2]}$; ovviamente esso è anche individuato da x_1 e da $u|_{(t_1, t_2]}$. La proprietà di separazione è intesa ad assicurare la consistenza tra gli stati x_1 ed x_0, ed a tal fine occorre che x_1 sia determinabile da x_0 e da $u|_{(t_0, t_1]}$ con *la stessa* funzione di transizione (già utilizzata per il calcolo di x_2 a partire sia da x_0, sia da x_1).

Tenendo conto della ovvia interpretazione della proprietà c), si possono considerare concluse queste osservazioni.

I.6 - Esempi.

A titolo di esempio, si consideri un sistema uniforme tale che $T = R$, $U = Y = R$, $\mathcal{U}$ sia lo spazio delle funzioni continue $u : R \to R$. Essendo il sistema uniforme, tutte le coppie ingresso-uscita sono individuate come troncamenti di coppie appartenenti ad una relazione del tipo (I.8). Quest'ultima sia definita dalle coppie (u, y) tali che $u \in \mathcal{U}$ ed $y : R \to R$ sia calcolabile con la:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \tag{I.20}$$

con:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, e^{\alpha_i t} \tag{I.21}$$

$h(t-\tau) = \sum A_i\, e^{\alpha_i(t-\tau)}$

$$\alpha_i \in R\ ,\quad \alpha_i < 0\ ,\quad \alpha_i \neq \alpha_j \quad \text{per} \quad i \neq j\ ,\quad A_i \in R$$

Si può ora mostrare che lo spazio R^n può essere assunto come spazio di stato del sistema così assegnato. Infatti, scelto un opportuno sistema di coordinate in R^n e quindi rappresentato un suo generico elemento x con il vettore $(x_1 \dots x_n)$, si possono assumere in questo caso come funzioni φ ed η le seguenti:

$$\varphi : \begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha_1(t-t_0)}\, x_{01} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)}\, u(\tau)\,d\tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t) = e^{\alpha_n(t-t_0)}\, x_{0n} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\alpha_n(t-\tau)}\, u(\tau)\,d\tau \end{cases} \tag{I.22}$$

$$\eta : \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, x_i(t) \tag{I.23}$$

Tali funzioni hanno tutte le proprietà richieste dalla Definizione I.3. Per verificare la proprietà di copertura, fissato un istante t_0, occorre individuare una rappresentazione dei due insiemi $\mathcal{S}(t_0)$ ed $\hat{\mathcal{S}}(t_0)$ e verificarne la coincidenza. Per quanto riguarda il primo, basta osservare che la (I.20) può essere riscritta nella forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \tag{I.24}$$

e cioè, data l'espressione (I.21) di $h(t)$,

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, e^{\alpha_i(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{\alpha_i(t_0-\tau)}\, u(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{t_0}^{t} e^{\alpha_i(t-\tau)}\, u(\tau)\,d\tau \tag{I.25}$$

fornendo così una possibile rappresentazione di $y|_{[t_0,\infty)}$.

Per quanto riguarda $\hat{\mathcal{S}}(t_0)$, dalle (I.23) ed (I.22) si ha:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, e^{\alpha_i(t-t_0)}\, x_{0i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{t_0}^{t} e^{\alpha_i(t-\tau)}\, u(\tau)\,d\tau \tag{I.26}$$

È immediato verificare che $\mathcal{S}(t_0) \subset \hat{\mathcal{S}}(t_0)$; basta infatti porre:

$$\int_{-\infty}^{t_0} e^{\alpha_i(t_0-\tau)}\, u(\tau)\,d\tau = x_{0i} \tag{I.27}$$

viceversa, per dimostrare che $\hat{\mathcal{S}}(t_0) \subset \mathcal{S}(t_0)$, occorre provare che, comunque sia fissata la n-upla di valori $x_{01}, \dots, x_{0n}$, esiste una funzione $u_{(-\infty, t_0]}$ tale che siano verificate le (I.27); questo è assicurato, come si può dimostrare, dall'ipotesi che sia $\alpha_i \neq \alpha_j$ per $i = j$. Pertanto $\hat{\mathcal{S}}(t_0) = \mathcal{S}(t_0)$.

La proprietà di unicità e causalità è immediata conseguenza del fatto che gli integrali nella (I.22) sono limitati all'intervallo $(t_0, t]$; quella di consistenza è anche soddisfatta per la struttura della (I.22).

La verifica della proprietà di separazione si può effettuare agevolmente applicando la (I.17) e si lascia come esercizio per il lettore.

A proposito di questo esempio si richiama l'attenzione sulla espressione (I.27) che pone in luce, per il particolare sistema che si sta esaminando, la dipendenza dello stato in t_0 dall'ingresso che è stato applicato fino a quell'istante. In effetti è importante sottolineare che ci si trova in presenza di un sistema per il quale la conoscenza di $u|_{(-\infty,t]}$ determina univocamente $y(t)$; in altri termini, in questo caso, ad ogni u corrisponde una y nella relazione che definisce il sistema.

Ciò non di meno il problema dell'introduzione dello stato rimane essenziale, perchè esso serve a garantire l'unicità dell'uscita $y(t)$ una volta che sia noto l'ingresso sul solo intervallo $(t_0, t]$ (e non su $(-\infty, t]$) (cfr. in proposito il paragrafo I.3). È bene però, per completare il quadro e chiarire ulteriormente questo punto, considerare un sistema, ancora uniforme, che differisce da quello dell'esempio ora considerato, in quanto, invece della (I.20), vale la:

$$y(t) = k + \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad k \in R \tag{I.28}$$

con la stessa funzione $h(t)$. Questa volta, a ogni u corrispondono infinite y, a seconda dei valori assunti dal parametro k. Lo stato quindi deve non solo soddisfare alle esigenze presenti nell'esempio precedente, ma anche a quelle conseguenti alla non unicità derivante dalla presenza del parametro nella relazione ingresso-uscita. In questo caso non si riesce ad assumere come spazio di stato R^n, ma è necessario considerare R^{n+1}. La funzione φ è definita dalle n relazioni della (I.22) e dalla:

$$x_{n+1}(t) = x_{0,n+1} \tag{I.29}$$

La η è data da questa volta da:

$$\eta: \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i(t) + x_{n+1}(t) \tag{I.30}$$

La verifica della proprietà (a, b, c, d) si lascia come esercizio al lettore.

I.7 - Associazione dello stato ad un sistema.

Quando il sistema è definito come relazione ingresso-uscita, (cfr. paragrafo I.4), si pone immediatamente il problema di trovare le condizioni che consentono di associare ad esso lo spazio di stato definito nel paragrafo precedente. In termini più precisi si tratta di affrontare sia i problemi di esistenza dello spazio di stato per una data classe di sistemi sia quelli di costruzione di una descrizione (mediante le funzioni φ ed η) che faccia intervenire lo spazio di stato.

Tali problemi sono fondamentali nella Teoria dei Sistemi, ma ad essi si accennerà solo brevemente in queste disperse, per i limiti e le finalità con cui esse sono stese.

In proposito si può incominciare con l'osservare che lo spazio di di stato introdotto con la Definizione I.3 esiste solo se il sistema in questione è *causale* e cioè, come già osservato in termini qualitativi nel paragrafo I.3, se l'uscita ad un istante $\bar{t}$ non dipende dai valori assunti dall'ingresso ad istanti $t > \bar{t}$.

In effetti se si vuole dare una definizione formale di causalità sull'insieme di relazioni ingresso-uscita, ci si imbatte in notevoli difficoltà. Per rendersi conto di ciò si consideri innanzitutto il caso particolare di quei sistemi che sono uniformi e definiti da una relazione che ad ogni u faccia corrispondere un solo y [e cioè una funzione, quale ad es. quella rappresentata dalla (I.20)]. In questo caso la definizione di causalità diventa abbastanza semplice e si può formulare nel seguente modo: il sistema è causale se, dati comunque un istante $\bar{t}$ e due ingressi u ed u' tali che $u|_{(-\infty,\bar{t}]} = u'|_{(-\infty,\bar{t}]}$, i valori delle corrispondenti uscite all'istante $\bar{t}$ sono coincidenti(1). Questa definizione è però sostanzialmente legata al fatto che, nella relazione che definisce questi particolari sistemi uniformi, ad ogni ingresso corrisponde una sola uscita. Nel caso generale, potendo corrispondere più uscite ad uno stesso ingresso, è chiaro che per poter definire la causalità nei termini sopra precisati, occorre poter riconoscere quale uscita deve essere presa in considerazione per la coppia di ingressi in esame. Questo riconoscimento può essere effettuato, ad esempio, se si riesce a esprimere l'insieme di relazioni ingresso-uscita, che definisce il sistema, come un insieme di funzioni, ciascuna delle quali sia contrassegnata da un parametro. Un tale processo si dice di *parametrizzazione* delle relazioni ingresso-uscita. Un esempio di tale possibilità può essere dato, almeno per i sistemi uniformi, considerando l'esempio (I.28); in questi casi infatti la relazione ingresso-uscita è immediatamente identificabile come la classe delle funzioni che si ottengono dalla (I.28) fissando il parametro k.

Partendo da queste osservazioni è possibile pervenire ad una definizione di sistema causale, nel caso generale. Sulla base di questa definizione si potrebbe dimostrare che, per i sistemi che ad essa soddisfano, è sempre possibile associare lo spazio di stato e quindi le due

(1) - Si è supposto, per semplicità di notazione, $T = R$. È ovvio quali siano le restrizioni di u e u' da considerare negli altri casi.

funzioni φ ed η[1].

Questo tipo di dimostrazione si basa sostanzialmente su una interpretazione più approfondita del processo di parametrizzazione dello insieme delle relazioni ingresso-uscita ed inoltre fornisce una procedura per la determinazione dello spazio di stato. Per tale ragione essa risolve pure il problema della costruzione dello spazio di stato, almeno a livello formale[2].

Un punto importante da porre in evidenza è la non unicità dello spazio di stato, nel senso che possono esistere per un assegnato sistema $\mathcal{S}$, diversi insiemi X e, corrispondentemente, diverse coppie di funzioni φ, η che soddisfano alle proprietà indicate nella definizione I.3. Ad esempio, per il sistema (I.14) considerato nel paragrafo precedente si può assumere come spazio di stato anche un qualsiasi spazio R^m con $m > n$, scegliendo opportunamente le funzioni φ ed η. In particolare, per $m = n + 1$, si può definire la funzione φ con le n relazioni (I.16) e con la:

$$x_{n+1}(t) = e^{\beta(t-t_0)}\, x_{0,n+1} \tag{I.31}$$

e la funzione η con la (I.17) stessa; o ancora, in luogo della (I.31), si può porre:

$$x_{n+1}(t) = e^{a_n(t-t_0)}\, x_{0,n+1} + \int_{t_0}^{t} e^{a_n(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \tag{I.32}$$

e, corrispondentemente, per la funzione η:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-1} A_i\, x_i(t) + \frac{A_n}{2} x_n(t) + \frac{A_n}{2} x_{n+1}(t) \tag{I.33}$$

e così via.

Gli esempi mostrano chiaramente che l'associazione dello spazio di stato può venire fatta anche con ridondanza. In proposito è importante introdurre il concetto di *stati equivalenti*, mediante la seguente.

(1) - Si veda in proposito il lavoro di G.T. Windeknect: *Mathematical System Theory: Causality, Mathematical System Theory*. I.4 (1967), 279-288.

(2) -Si vedano anche le osservazioni di pag.11 e 12 del testo [D. 10].

Definizione I.4. Due elementi x_a ed x_b di uno spazio di stato X relativo ad un dato sistema $\mathcal{S}$ si dicono equivalenti[1] all'istante t_0 se:

$$\eta[t, \varphi(t, t_0, x_a, u), u(t)] = \eta[t, \varphi(t, t_0, x_b, u), u(t)] \tag{I.34}$$

$$\forall t \geq t_0 \quad , \quad \forall u \cdot \mathcal{U} \qquad \triangleleft$$

In altri termini due stati x_a ed x_b sono equivalenti se e solo se quale che sia l'ingresso u, l'uscita del sistema a partire dallo stato iniziale x_a coincide con quella a partire dallo stato iniziale x_b. In altri termini ancora, due stati x_a ed x_b sono equivalenti se e solo se non esiste alcun ingresso u tale che i due termini nella (I.23) risultino diversi in almeno un istante $t > t_0$; per questa ragione gli stati equivalenti vengono anche detti *stati indistinguibili*. Per negazione si possono dare le definizioni di stati non equivalenti ed introdurre la dizione di stati *distinguibili*.

Al concetto di stato equivalente si collega la seguente importante:

Definizione I.4. Uno spazio di stato X associato ad un dato sistema $\mathcal{S}$ si dice ridotto se in esso non esistono coppie di stati equivalenti.

Per illustrare queste definizioni si può ancora ricorrere agli esempi sin qui introdotti. Per il sistema (I.14), se si considera come spazio di stato lo spazio R^{n+1} e come funzione φ, η quelle definite dalle (I.16), (I.31) ed (I.17), risultano equivalenti due qualsiasi stati x_a ed x_b per i quali sia $x_{a1} = x_{b1}, \ldots ; x_{an} = x_{bn}$, o, in altre parole, che differiscano solo per la $(n+1)$-esima componente. Infatti il valore $y(t)$ dell'uscita non dipende da tale componente e ciò assicura il soddisfacimento della (I.28) per gli stati così individuati. Ancora per questo sistema, se come funzioni φ, η si considerano quelle definite dalle (I.16), (I.31) ed (I.33), risultano equivalenti due qualsiasi stati tali che $x_{a1} = x_{b1}, \ldots, x_{a,n-1} = x_{b,n-1}, x_{a,n} + x_{a,n+1} = x_{b,n} + x_{b,n+1}$. In entrambe i casi ora considerari lo spazio di stato non è ridotto, proprio perchè esistono stati equivalenti. Invece, lo spazio di stato R^n caratterizzato, dalle funzioni (I.16), (I.17) è ridotto. Ciò si può provare per negazione; esistessero due stati x_a ed x_b equivalenti, dovrebbe, in accordo con la (I.28), risultare:

(1) - L'aggettivo *equivalente* è usato consistentemente con il sussistere delle tre proprietà che caratterizzano le relazioni di equivalenza. La verifica di ciò sulla (I.34) è immediata.

$$(I.35) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i(t-t_0)} x_{ai} + \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{t_0}^{t} e^{\alpha_i(t-\tau)} u(\tau)d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i(t-t_0)} x_{bi} + \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{t_0}^{t} e^{\alpha_i(t-\tau)} u(\tau)d\tau$$

per ogni u ed ogni $t \geq t_0$. Ciò equivale alla:

$$(I.36) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i(t-t_0)} (x_{ai} - x_{bi}) = 0 \qquad \forall t \geq t_0$$

e questa chiaramente, essendo per ipotesi $\alpha_i \neq \alpha_j$ per $i \neq j$ (e quindi essendo le funzioni $e^{\alpha_i(t-t_0)}$ linearmente indipendenti su ogni intervallo $[t_0, t]$), non può essere soddisfatta se $x_{ai} \neq x_{bi}$ per almeno un valore di i, cioè se $x_a \neq x_b$.

Appare opportuno, a conclusione di questo paragrafo, riassumere alcuni punti essenziali. In ipotesi molto generali, sostanzialmente quella di causalità, è possibile ad un sistema astratto associare lo spazio di stato. Questo processo di associazione può essere fatto in infiniti modi diversi e ciò pone in luce il diverso ruolo che le variabili di stato hanno rispetto a quelle di ingresso e di uscita, che sono invece univocamente individuate con l'assegnazione del sistema. Risultano così chiarite e confermate le indicazioni qualitative fatte alla fine del paragrafo I.3. Tra i vari spazi di stato che si possono associare ad un dato sistema $\mathcal{S}$ hanno particolare importanza i casi in cui lo spazio di stato è ridotto. Anche in questo caso, tuttavia, rimangono dei problemi di scelta ulteriore; così ad esempio, se X è lineare, rimane l'arbitrarietà connessa alla scelta del sistema di coordinate nello spazio di stato, dalla quale dipende la rappresentazione delle funzioni φ ed η.

I.8 - Definizione alternativa di sistema.

Si era già osservato all'inizio del paragrafo I.4 che è possibile dare una definizione di sistema nella quale si introduce direttamente lo stato accanto alle grandezze di ingresso e di uscita.

Definizione I.6. Dato un sottoinsieme ordinato T dell'insieme R dei numeri reali e tre insiemi arbitrari non vuoti U, Y ed X, si dice sistema astratto orientato una coppia di funzioni:

$$(I.37) \qquad \varphi : (T \times T)^* \times X \times \mathcal{U} \to X \qquad (\mathcal{U} \subset U^T)$$

$$(I.38) \qquad \eta : T \times X \times U \to Y$$

tali che valgono le seguenti proprietà:

a) (unicità e causalità):

$$(I.39) \qquad \varphi(t, t_0, x_0, u) = \varphi(t, t_0, x_0, u')$$

$$\forall (t, t_0) \in (T \times T)^*, \quad \forall x_0 \in X, \quad \forall u, u' \in \mathcal{U} : u|_{(t_0, t]} = u'|_{(t_0, t]}$$

b) (consistenza):

$$(I.40) \qquad \varphi(t, t, x_0, u) = x_0$$

$$\forall t \in T, \quad \forall x_0 \in X, \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

c) (separazione):

$$(I.41) \qquad \varphi(t, t_0, x_0, u) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0, u), u)$$

$$\forall (t, t_0) \in (T \times T)^*, \quad \forall t_1 \in (t_0, t), \quad \forall x_0 \in X, \quad \forall u \in \mathcal{U} \qquad \triangleleft$$

Per il sistema così definito T viene detto insieme dei valori del tempo, U insieme dei valori della grandezza di ingresso ed $\mathcal{U}$ spazio delle funzioni di ingresso, Y insieme dei valori di uscita ed:

$$(I.42) \qquad \mathcal{Y} = \{y(t) = \eta[t, \varphi(t, t_0, x_0, u), u(t)], u \in \mathcal{U}, x_0 \in X, t_0 \in T\}$$

spazio delle funzioni di uscita, X spazio di stato, φ funzione di transizione dello stato ed η trasformazione in uscita.

A commento di questa definizione si fa anzitutto osservare che essa nasce dal complesso delle due Definizioni I.1 e I.3; è scomparsa, ovviamente, la proprietà di copertura, mentre sono rimaste le tre proprietà della funzione di transizione (che si sono ripetute per completezza).

L'introdurre lo spazio di stato al livello stesso di definizione di sistema fa scomparire l'arbitrarietà che viceversa è presente nell'associazione dello stato ad un sistema definito come relazione ingresso-uscita.

A conclusione si osserva esplicitamente che gli autori considerano preferibile l'impostazione presente nei paragrafi I.4 ed I.5, che adotta il punto di vista ingresso-uscita nella definizione di sistema. In esso peraltro si inquadrano in modo naturale quei particolari problemi di associazione dello stato che vanno sotto il nome di problemi di *realiz-*

zazione (presentati nel seguito, per una classe particolare di sistemi) che sono di fondamentale importanza nella teoria dei sistemi.

Si è tuttavia ritenuto utile, per dare un quadro completo, riportare anche i dati essenziali del punto di vista ingresso-stato-uscita, al livello definitorio.

I.9 - Oggetto della teoria dei sistemi.

In generale la descrizione di un sistema non è disponibile esplicitamente nella forma prevista dalla definizione che si è adottata; cioè non si dispone di una rappresentazione esplicita della relazione $\mathcal{S}$ ingresso-uscita (caso della Definizione I.1) o di quella delle funzioni φ ed η (caso della Definizione I.6). Così, ad esempio, può avvenire che si abbia a disposizione una equazione (differenziale o alle differenze) tra le funzioni di ingresso e di uscita, ovvero un'equazione nella quale siano presenti anche variabili intermedie (a priori non necessariamente identificabili come variabili di stato), o una coppia ordinata di funzioni di ingresso e di uscita assegnate sull'intero insieme T, ecc. È chiaro pertanto che un problema fondamentale che si presenta nella teoria dei sistemi è l'analisi di questi vari tipi di descrizione possibili in rapporto alla possibilità di pervenire, da essi, alla relazione esplicita ingresso-uscita ovvero in pratica, per quanto si è detto nei paragrafi precedenti, alla coppia di funzioni φ ed η. In tale contesto hanno anche importanza le trasformazioni da un tipo di descrizione all'altra, l'analisi delle condizioni sotto le quali esse sono equivalenti, ecc. Un ruolo fondamentale in questo studio è svolto, come risulterà chiaro nel seguito, dalle proprietà dello spazio di stato (proprietà di interazione ingresso-stato, e interazione stato-uscita, ecc.).

È utile sottolineare che la soluzione dei problemi elencati è fondamentale, oltre che ai fini dello studio del comportamento del sistema in corrispondenza ai vari ingressi (problemi di *analisi*), anche per stabilire le condizioni sotto le quali è possibile risalire ad una descrizione del sistema a partire da una ridotta quantità di informazione relativa al comportamento ingresso-uscita (costruzione del *modello matematico* o problemi di *identificazione*)(1).

(1) - È utile tenere presente che il cosiddetto problema della *sintesi*, che consiste nella determinazione di un sistema che abbia un assegnato comportamento ingresso-uscita, si formula in termini perfettamente analoghi a quelli della identificazione. La differenza sta nel fatto che nella sintesi il sistema è da progettare mentre, nell'identificazione, si tratta di trovare il modello matematico di un sistema già esistente.
Pertanto il contributo che la teoria dei sistemi fornisce nei riguardi problemi di identificazione sussiste anche per quelli di sintesi.

A conclusione si può dire che *l'analisi dei diversi modelli matematici e delle trasformazioni dall'uno all'altro* costituisce una parte fondamentale della teoria dei sistemi(1).

Un'altra classe importante di problemi che si incontrano nello studio dei sistemi nasce dall'interesse, presente in diverse applicazioni, a determinare, piuttosto che l'andamento effettivo della risposta corrispondente a certi ingressi, alcune sue caratteristiche qualitative e globali. Così ad esempio può essere utile stabilire se ad ingressi limitati corrispondono uscite limitate, se a partire da certi stati iniziali, con ingresso nullo, la risposta tende a zero, ecc.; può essere utile, in altri termini, affrontare il cosiddetto problema della *stabilità*. Altro esempio è quello in cui interessa valutare l'influenza, sulla risposta, di variazioni di alcuni parametri del sistema: in questo caso si parla di studio della *sensibilità*. Questi problemi, ed altri analoghi che si potrebbero elencare, costituiscono l'oggetto della cosidetta *teoria qualitativa*, che è una altra parte fondamentale della teoria dei sistemi.

I.10 - Classificazione dei sistemi.

Il concetto di sistema è così generale che lo sviluppo di metodi atti a risolvere compiutamente sul piano operativo i problemi elencati nel paragrafo precedente richiede la particolarizzazione dello studio a determinate classi di sistemi. Da questo punto di vista è utile classificare i sistemi sulla base degli enti che li caratterizzano.

Una prima classificazione può essere fatta in relazione alla natura dell'insieme T dei valori del tempo. Precisamente i sistemi vengono detti *a tempo continuo* (o, brevemente, *continui*) se T è un *intervallo* dell'insieme R dei numeri reali, eventualmente coincidente con R stesso; i sistemi vengono detti a *tempo discreto* (o *discreti*) se T è un sottoinsieme *numerabile* di R, eventualmente coincidente con l'insieme Z dei numeri interi.

Una seconda classificazione è relativa alla natura dello spazio di stato X. Si possono distinguere sistemi *a stato continuo*, *a stato discreto* a *a stato finito* (detti anche a stati finiti) a seconda che X sia un insieme *continuo*, *numerabile* o *finito*.

Per l'importante classe di sistemi nei quali X è uno *spazio lineare* è utile distinguere il caso in cui esso è a dimensione finita (ad e-

(1) - Tra questi problemi rientrano anche i cosiddetti problemi di *realizzazione* citati alla fine del paragrafo I.7.

sempio l'insieme di tutte le n-uple ordinate di numeri reali o complessi) da quello in cui ha dimensione infinita; i primi vengono detti sistemi di *ordine finito*.

Altri tipi di classificazione possono essere effettuati prendendo in considerazione o la relazione $\mathcal{S}$ o la coppia di funzioni φ ed η. Così, ad esempio, nel caso dei sistemi uniformi, si possono definire i sistemi *senza memoria* (o *istantanei*) se esiste una funzione $f : U \to Y$ tale che, per ogni coppia $(u, y) \in \mathcal{S}_{un}$, vale la:

$$y(t) = f\,[u(t)] \qquad \forall\, t \in T \tag{I.43}$$

È chiaro che tali sistemi costituiscono un caso banale e che per essi non ha alcun senso introdurre lo stato. Quando ciò non si verifica il sistema viene detto *con memoria*. Può avere interesse considerare sistemi per cui esiste una funzione $g : \mathcal{U} \to Y$ tale che, in luogo della (I.43), vale la:

$$y(t) = f\,[u|_{[t-L,t]}] \qquad L > 0 \;,\; \forall\, t \in T : [t-L, t] \subset T \tag{I.44}$$

Tali sistemi vengono detti *a memoria finita* (di durata L).

Altre distinzioni importanti possono essere date basandosi sulle proprietà di linearità, di stazionarietà e sulle loro negazioni. Esse verranno definite nel Capitolo successivo, che è appunto dedicato allo studio dei sistemi lineari e stazionari.

*

APPENDICE I

A.I.1 - Notazioni[1].

Insieme prodotto. Una *coppia ordinata* di elementi a e b, in questo ordine, viene indicata con (a, b). L'eguaglianza di due coppie ordinate è definita da:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' ,\; b = b' \tag{1}$$

Siano ora dati due insiemi A e B. Si dirà *insieme-prodotto di A per B* o *prodotto cartesiano di A per B* l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate (a, b) di elementi a di A e b di B; in simboli:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A ,\; b \in B\} \tag{2}$$

Relazioni. Si consideri un sottoinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$. Per ogni coppia $(a, b) \in \mathcal{R}$ è usuale dice che «a è nella relazione $\mathcal{R}$ con b", e scrivere $a \mathcal{R} b$. Il sottoinsieme $\mathcal{R}$ viene detto *grafico* (o grafo) della relazione.

Una semplice interpretazione grafica di questi concetti è data in fig.1. Se A è l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 2 (estremi inclusi) e B quello dei numeri reali compresi tra 0 ed 1, il prodotto $A \times B$ è in corrispondenza biunivoca con il rettangolo indicato in figu-

(1) - Si suppone che il lettore sia a conoscenza del significato dei connettivi $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ e di quantificatori $\forall$, $\exists$. Per quanto riguarda gli insiemi, si suppongono noti i simboli di appartenenza $\in$, di inclusione $\subset$, di unione $\cup$, di intersezione $\cap$. si precisa inoltre che con $\{a : a \in A ,\, \mathcal{P}(a)\}$ si indica il sottoinsieme costituito dagli elementi di un dato insieme A, per i quali sia vera una determinata proposizione $\mathcal{P}(a)$.

ra. Un suo sottoinsieme $\mathcal{R}$ stabilisce una «relazione» tra le coppie di numeri reali che ne individuano gli elementi.

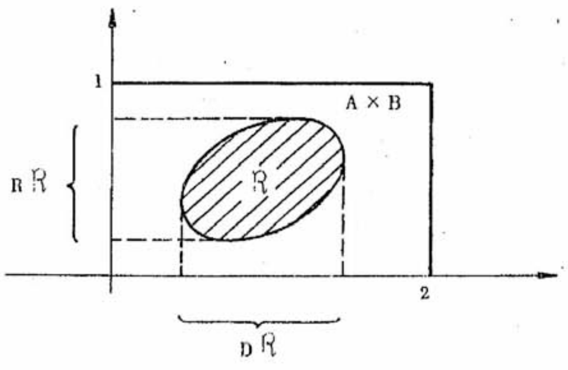

Fig.1

I sottoinsiemi

(3) $\quad D\mathcal{R} = \{a : a \in A \;,\; (\exists\, b \in B : (a,b) \in \mathcal{R})\}$

(4) $\quad R\mathcal{R} = \{b : b \in B \;,\; (\exists\, a \in A : (a,b) \in \mathcal{R})\}$

sono detti, rispettivamente, *dominio* e *codominio* della relazione.

Funzioni. Un particolare tipo di relazione è costituito dalle *funzioni* (o *applicazioni*). Una funzione è una relazione f definita su $A \times B$, tale che per ogni $a \in A$ esista uno e un solo elemento $b \in B$ per cui sia $(a, b) \in f$. La nozione si può interpretare intuitivamente con riferimento alla fig.2; la coppia (a, b) fa corrispondere al punto $a \in A$ il punto $b \in B$.

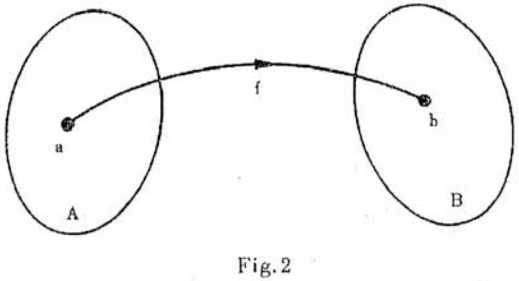

Fig.2

L'insieme A viene chiamato *dominio* di f, l'insieme B *codominio*. Per ogni $a \in A$, l'unico elemento $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ si indica con $f(a)$ e si dice *valore* assunto dalla funzione f in a. Per rappresentare questi enti viene usata la notazione:

(5) $$f : A \to B$$

che significa: «f è una funzione avente per dominio A e codominio B».

Il *grafo* della funzione f è, per definizione, il sottoinsieme: $\{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B$.

Il sottoinsieme di B costituito dagli elementi che provengono da qualche elemento di A si dice *immagine* della funzione f; in simboli:

(6) $$R\,f = \{b : b \in B \;,\; (\exists\, a \in A : f(a) = b)\}$$

Data una funzione $f : A \to B$ e dato un sottoinsieme C di A, si dice *restrizione* di f a C e si indica con $f|_C$ la funzione:

(7) $$f|_C : C \to B$$

tale che, per ogni $a \in C$, $f|_C(a) = f(a)$.

Il grafo della restrizione $f|_C$ di una data funzione f è evidentemente un sottoinsieme del grafo della f stessa; si veda in proposito la fig.3. Esso viene talvolta chiamato *segmento della funzione f*.

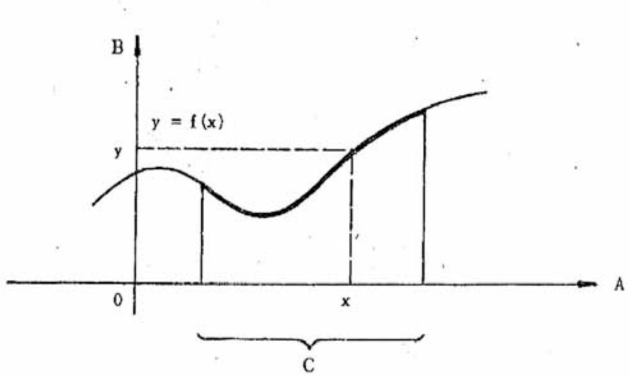

Fig.3

Dati due insiemi A e B, la totalità delle funzioni f aventi come dominio A e come codominio B costituisce un insieme che viene indicato con B^A; in simboli:

(8) $$B^A = \{f : (f : A \rightarrow B)\}$$

Equivalenza. Sia dato un insieme A e si supponga che esista una relazione $\mathcal{R} \subset A \times A$ che gode delle proprietà:

(9) $\forall\, a \in A : (a, a) \in \mathcal{R}$ (riflessiva)

(10) $\forall\, a, b \in A : (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$ (simmetrica)

(11) $\forall\, a, b, c \in A : (a, b) \in \mathcal{R},\ (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$ (transitiva)

Tale relazione si dice *equivalenza.*

Ordinamento. Sia dato un insieme A e si supponga che esista una relazione $\mathcal{R} \subset A \times A$ che goda delle proprietà (9), (11) e della:

(12) $\forall\, a, b \in A : (a, b) \in \mathcal{R},\ (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$ (antisimmetrica)

La relazione $\mathcal{R}$ si dice *ordinamento* e l'insieme A si dice *ordinato.* Ad esempio, se l'insieme A è costituito dalle totalità dei numeri reali, la relazione definita dal sottoinsieme $\mathcal{R}$ dei punti del piano indicato in fig.4 è un ordinamento; essa individua i punti la cui ascissa a è minore o uguale all'ordinata b e pertanto corrisponde all'usuale relazione d'ordine che si considera sulla totalità dei numeri reali.

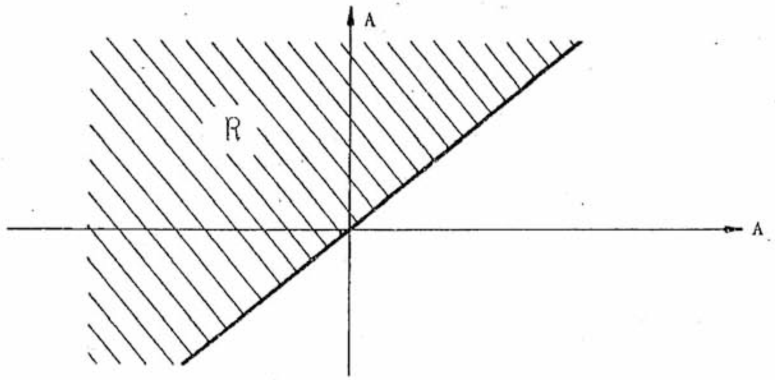

Fig.4

Altre convenzioni. La totalità delle n-uple ordinate di numeri reali verrà indicata con R^n. Quella delle n-uple ordinate di numeri complessi con

C^n. Un generico intervallo di R sarà indicato con $[a, b]$ se chiuso e con (a, b) se aperto (a proposito di quest'ultima notazione, sarà chiaro dal contesto se debba trattarsi di intervallo aperto o coppia ordinata). Quando si parlerà di ordinamento su R (o su un suo sottoinsieme), si intenderà riferirsi a quello normalmente in uso, già esemplificato in precedenza (cfr. fig.4).

*

BIBLIOGRAFIA

Per quanto riguarda la teoria generale dei sistemi si segnalano:

[G.1] L. VON BERTALANFFY, *Teoria Generale dei Sistemi*. Fondamenti, sviluppo, applicazioni (I.T.I., 1968).

[G.2] G. J. KLIR, *An approch to General System Theory*. (Van Nostrand, 1969).

[G.3] T. G. WINDEKNECHT, *General Dynamical Processes*. A mathematical Introduction (Academic Press 1971).

Per la teoria dei sistemi dinamici si indicano i seguenti volumi:

[D.1] C. A. ZADEH e L. A. DESOER, *Linear System Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1963).

[D.2] M. DE RUSSO, J. ROY e M. CLOSE, *State variable for Engineers* (Addison-Wesley, Reading, 1965).

[D.3] H. FREEMAN, *Discrete-Time Systems* (Wiley, London, 1965).

[D.4] R. J. SCHWARZ e B. FRIEDLAND, *Linear Systems* (Mc Graw-Hill, New York, 1965).

[D.5] S. C. GUPTA, *Transform and State Variable Methods in Linear Systems* (Wiley, New York, 1966).

[D.6] W. A. PORTER, *Modern Foundations of Systems Engineering* (Mc Millan, New York, 1966).

[D.7] K. OGATA, *State Space Analysis of Control Systems* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967).

[D.8] D. C. SCHULTZ e J. L. MELSA, *State Functions and Linear Control Systems* (Mc Graw-Hill, New York, 1967).

[D.9] L. K. THIMOTY e B. E. BONA, *State Space Analysis: an Introduction* (Mc Graw-Hill, New York, 1967).

[D.10] R. E. KALMAN, P. FALB e M. A. ARBIB, *Topics in Mathematical System Theory*. (Mc Graw-Hill, New York, 1969).

[D.11] L. A. ZADEH e E. POLAK, *System Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1969).

[D.12] H. H. ROSENBROCK, *State Space and Multivariable Theory* (Nelson, 1970).

[D.13] R. W. BROCKETT, *Finite-dimensional Linear Systems* (Wiley, New York, 1970).

[D.14] J. M. HOLTZMANN, *Nonlinear System Theory*. (A functional analysis approach) (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1970).

[D.15] C. T. CHEN, *Introduction to Linear System Theory* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970).

[D.16] E. POLAK e E. WONG, *Notes for a First Course on Linear Systems* (Van Nostrand, London, 1970).

[D.17] C. A. DESOER, *Notes for a Second Course on Linear Systems* (Van Nostrand, London, 1970).

[D.18] J. E. RUBIO, *The Theory of Linear Systems* (Academic Press, New York, 1971).

[D.19] D. M. WIBERG, *Theory and Problems of State Space and Linear Systems* (Schaums Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1971).

*

CAPITOLO II   Tutto

SISTEMI LINEARI DI ORDINE FINITO

$\varphi: \varphi((T \times T) \times X \times U)$

Spazio di stato: $\begin{cases} \varphi: (T \times T)^* \times X \times U \to X \\ \eta: T \times X \times U \to Y \end{cases}$

II.1 - Definizione di linearità.

In questo capitolo si considereranno sistemi continui nel tempo, con più di una grandezza di ingresso e di uscita ed, inoltre, di ordine finito, cioè (cfr. paragrafo I.10) caratterizzati da uno spazio di stato lineare e a dimensione finita.

La definizione di linearità può essere data prendendo in considerazione sia la descrizione ingresso-uscita sia quella ingresso-stato-uscita. Poichè la classe di sistemi che si è scelto di considerare è caratterizzata da una ipotesi sulla natura dello spazio di stato (ordine finito), sembra più opportuno dare la definizione assumendo come descrizione del sistema quella data dalle funzioni φ ed η introdotte nel Capitolo I (cfr. I.18 e I.19).

Occorre anzitutto osservare che si può definire un sistema lineare solo se gli spazi U ed Y dei valori delle grandezze di ingresso e di uscita sono lineari. Assumendo di voler prendere in esame sistemi caratterizzati da p grandezze di ingresso e q grandezze di uscita, gli spazi U ed Y risulteranno spazi lineari a dimensione p e, rispettivamente, q. Lo spazio di stato X, che per ipotesi è lineare e a dimensione finita, sarà assunto n-dimensionale. Lo stato è una variabile ausiliaria che può non avere un significato fisico diretto; è quindi possibile ed anzi, conveniente, rappresentarlo anche mediante numeri complessi ed assumere pertanto $X = C^n$. Di conseguenza, per omogeneità [cfr. più oltre le (II.3) e (II.4)] si assume anche $U = C^p$ ed $Y = C^q$.

Ciò, premesso, scelto anche $T = R$ ed indicando in neretto le grandezze vettoriali, la descrizione ingresso-stato-uscita si riscrive nella forma: