BIBLIOGRAFIA

Per quanto riguarda la teoria generale dei sistemi si segnalano:

[G.1] L. VON BERTALAFFY, *Teoria Generale dei Sistemi*. Fondamenti, sviluppo, applicazioni (I.T.I., 1968).

[G.2] G. J. KLIR, *An approch to General System Theory*. (Van Nostrand, 1969).

[G.3] T. G. WINDEKNECHT, *General Dynamical Processes*. A mathematical Introduction (Academic Press 1971).

Per la teoria dei sistemi dinamici si indicano i seguenti volumi:

[D.1] C. A. ZADEH e L. A. DESOER, *Linear System Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1963).

[D.2] M. DE RUSSO, J. ROY e M. CLOSE, *State variable for Engineers* (Addison-Wesley, Reading, 1965).

[D.3] H. FREEMAN, *Discrete-Time Systems* (Wiley, London, 1965).

[D.4] R. J. SCHWARZ e B. FRIEDLAND, *Linear Systems* (Mc Graw-Hill, New York, 1965).

[D.5] S. C. GUPTA, *Transform and State Variable Methods in Linear Systems* (Wiley, New York, 1966).

[D.6] W. A. PORTER, *Modern Foundations of Systems Engineering* (Mc Millan, New York, 1966).

[D.7] K. OGATA, *State Space Analysis of Control Systems* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967).

[D.8] D. C. SCHULTZ e J. L. MELSA, *State Functions and Linear Control Systems* (Mc Graw-Hill, New York, 1967).

[D.9] L. K. THIMOTY e B. E. BONA, *State Space Analysis: an Introduction* (Mc Graw-Hill, New York, 1967).

[D.10] R. E. KALMAN, P. FALB e M. A. ARBIB, *Topics in Mathematical System Theory*, (Mc Graw-Hill, New York, 1969).

[D.11] L. A. ZADEH e E. POLAK, *System Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1969).

[D.12] H. H. ROSENBROCK, *State Space and Multivariable Theory* (Nelson, 1970).

[D.13] R. W. BROCKETT, *Finite-dimensional Linear Systems* (Wiley, New York, 1970).

[D.14] J. M. HOLTZMANN, *Nonlinear System Theory*. (A functional analysis approach) (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1970).

[D.15] C. T. CHEN, *Introduction to Linear System Theory* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970).

[D.16] E. POLAK e E. WONG, *Noteg for a First Course on Linear Systems* (Van Nostrand, London, 1970).

[D.17] C. A. DESOER, *Notes for a Second Course on Linear Systems* (Van Nostrand, London, 1970).

[D.18] J. E. RUBIO, *The Theory of Linear Systems* (Academic Press, New York, 1971).

[D.19] D. M. WIBERG, *Theory and Problems of State Space and Linear Systems* (Schaums Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1971).

*

CAPITOLO II Tutto

SISTEMI LINEARI DI ORDINE FINITO

$\varphi: \mathcal{F}((T \times T) \times X \times U)$

Spazio di stato $\begin{cases} \varphi: (T \times T)^* \times X \times U \to X \\ \eta: T \times X \times U \to Y \end{cases}$

II.1 - Definizione di linearità.

In questo capitolo si considereranno sistemi continui nel tempo, con più di una grandezza di ingresso e di uscita ed, inoltre, di ordine finito, cioè (cfr. paragrafo I.10) caratterizzati da uno spazio di stato lineare e a dimensione finita.

La definizione di linearità può essere data prendendo in considerazione sia la descrizione ingresso-uscita sia quella ingresso-stato-uscita. Poichè la classe di sistemi che si è scelto di considerare è caratterizzata da una ipotesi sulla natura dello spazio di stato (ordine finito), sembra più opportuno dare la definizione assumendo come descrizione del sistema quella data dalle funzioni φ ed η introdotte nel Capitolo I (cfr. I.18 e I.19).

Occorre anzitutto osservare che si può definire un sistema lineare solo se gli spazi U ed Y dei valori delle grandezze di ingresso e di uscita sono lineari. Assumendo di voler prendere in esame sistemi caratterizzati da p grandezze di ingresso e q grandezze di uscita, gli spazi U ed Y risulteranno spazi lineari a dimensione p e, rispettivamente, q. Lo spazio di stato X, che per ipotesi è lineare e a dimensione finita, sarà assunto n-dimensionale. Lo stato è una variabile ausiliaria che può non avere un significato fisico diretto; è quindi possibile ed anzi, conveniente, rappresentarlo anche mediante numeri complessi ed assumere pertanto $X = C^n$. Di conseguenza, per omogeneità [cfr. più oltre le (II.3) e (II.4)] si assume anche $U = C^p$ ed $Y = C^q$.

Ciò, premesso, scelto anche $T = R$ ed indicando in neretto le grandezze vettoriali, la descrizione ingresso-stato-uscita si riscrive nella forma:

$$\text{(II.1)} \qquad \mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}|_{(t_0, t]})$$

$$\text{(II.2)} \qquad \mathbf{y}(t) = \eta(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Tenendo ora presente le (I.12) e (I.13) si può dare la seguente[1]:

Definizione II.1 - Il sistema descritto dalle (II.1) e (II.2) è *lineare* se, per ogni coppia $(t, t_0) \in (R \times R)^*$, φ è lineare sul prodotto $X \times \mathcal{U}$ e, per ogni $t \in R$, η è lineare sul prodotto $X \times U$.

La proprietà di linearità, ora definita, induce una struttura particolarmente semplice sulle funzioni φ ed η, alla deduzione della quale è dedicato questo capitolo.

Prima di concludere il paragrafo si ritiene utile rendere esplicite alcune implicazioni, sia pure dirette ed ovvie, della linearità, soprattutto a motivo della loro interpretazione in termini di comportamento dinamico del sistema.

Se si tiene presente la struttura di spazio lineare su $X \times \mathcal{U}$ definita dalle operazioni:

$$\text{(II.3)} \qquad k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \triangleq (k\,\mathbf{x}, k\,\mathbf{u})$$

$$\forall k \in C \; ; \qquad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in (X \times \mathcal{U})$$

$$\text{(II.4)} \qquad (\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2) \triangleq (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$$

$$\forall (\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2) \in (X \times \mathcal{U})$$

la linearità di φ su $X \times \mathcal{U}$ comporta che sia soddisfatta la condizione seguente:

$$\text{(II.5)} \qquad \varphi(t, t_0, k_1 \mathbf{x}_{01} + k_2 \mathbf{x}_{02}, k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2) =$$

$$= k_1\, \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_{01}, \mathbf{u}_1) + k_2\, \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_{02}, \mathbf{u}_2)$$

$$\forall k_1, k_2 \in C \; ; \quad \forall (\mathbf{x}_{01}, \mathbf{u}_1), (\mathbf{x}_{02}, \mathbf{u}_2) \in (X \times \mathcal{U})$$

Da essa si possono dedurre alcune importanti proprietà. Si ponga anzitutto $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}_{02} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 = 0$; la (II.5) fornisce allora (isolando il primo dei termini a secondo membro):

(1) - Per le nozioni di base sugli spazi lineari, si veda il testo di A. Ghizzetti-L. Marchetti-A. Ossicini: *Lezioni di Complementi di Analisi Matematica*, Veschi (Roma) 1972.

$$\text{(II.6)} \qquad \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) + \varphi(t, t_0, \mathbf{0}, \mathbf{u})$$

L'esame di questa relazione pone in luce che il valore assunto dallo stato all'istante t (*risposta nello stato*) a partire dallo stato $\mathbf{x}_0$ all'istante t_0 sotto l'azione dell'ingresso $\mathbf{u}|_{(t_0, t]}$ [primo membro della (II.6)] risulta, in un sistema lineare, decomposto nella somma di due termini. Il primo è pari al valore assunto dallo stato all'istante t a partire dallo stato $\mathbf{x}_0$ all'istante t_0 con ingresso identicamente nullo sull'intervallo $(t_0, t]$ e ad esso si dà il nome di *risposta libera*, o con *ingresso nullo*; la sua interpretazione in termini di esperimenti che possono essere effettuati sul sistema è ovvia. Il secondo termine è pari al valore assunto dallo stato all'istante t a partire dall'origine dello spazio di stato all'istante t_0 sotto l'azione dell'ingresso $\mathbf{u}|_{(t_0, t]}$ e prende il nome di *risposta forzata*; anch'essa è di immediata interpretazione.

Applicando ancora la proprietà (II.5) separatamente ai due termini a secondo membro nella (II.6) si deduce che la risposta libera è lineare rispetto allo stato iniziale $\mathbf{x}_0$ e quella forzata è lineare rispetto all'ingresso $\mathbf{u}|_{(t_0, t]}$.

Si può verificare che analoghe proprietà sussistono se si considera la *risposta nell'uscita*, considerata come funzione dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$ (all'istante t_0) e dell'ingresso $\mathbf{u}_{(t_0, t]}$.

Questa è deducibile dalle (II.1) e (II.2) sostituendo la prima nella seconda ed assume l'espressione:

$$\text{(II.7)} \qquad \mathbf{y}(t) = \eta\,[t, \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}|_{(t_0, t]}), \mathbf{u}(t)]$$

Tenendo conto delle linearità di φ su $X \times \mathcal{U}$ e di η su $X \times U$, ci si rende immediatamente conto che la (II.7) è lineare su $X \times \mathcal{U}$ e che quindi per essa si possono ripetere le considerazioni sopra sviluppate a proposito della risposta nello stato.

A conclusione si può dunque enunciare la seguente:

Proposizione II.1 - Nei sistemi lineari, le risposte, nello stato e nella uscita, godono delle seguenti proprietà:

a) decomponibilità nella somma di risposta libera e forzata;

b) linearità della risposta libera rispetto allo stato iniziale;

c) linearità della risposta forzata rispetto all'ingresso.

II.2 - Risposta libera nello stato.

La proposizione II.1 autorizza a considerare separatamente la risposta libera e la risposta forzata; in particolare in questo paragrafo si considereranno le implicazioni della linearità sulla risposta libera nello stato e cioè sulla funzione $\varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{0})$. Si tratta di vedere come si particolarizza la relazione:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) \tag{II.8}$$

Si supponga di scegliere come stato iniziale all'istante t_0, il vettore (a n componenti)

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.9}$$

e di considerare il valore assunto in conseguenza dalla risposta libera all'istante t; per esplicitare la dipendenza dalla coppia di istanti t_0 e t, tale valore si indicherà con il vettore (ancora ad n componenti) $\varphi_1(t, t_0)$. Siano ancora:

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.10}$$

e $\varphi_2(t, t_0)$ un altro stato iniziale ed il corrispondente stato all'istante t, ecc. fino a considerare il vettore:

$$\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{II.11}$$

e, corrispondentemente, $\varphi_n(t, t_0)$.

Grazie alla linearità, la conoscenza delle n risposte nello stato così definite $\varphi_1(t, t_0), \dots, \varphi_n(t, t_0)$ consente di calcolare la risposta corrispondente ad un generico stato iniziale $\mathbf{x}_0$. Infatti questo, indicate con $x_{01}, \dots, x_{0n}$ le sue componenti, si può porre nella forma:

$$\mathbf{x}_0 = x_{01}\,\mathbf{e}_1 + \dots + x_{0n}\,\mathbf{e}_n \tag{II.12}$$

e, per la linearità, si ha:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_1(t, t_0)\, x_{01} + \dots + \varphi_n(t, t_0)\, x_{0n} \tag{II.13}$$

Se si introduce ora la matrice $n \times n$:

$$\Phi(t, t_0) = [\varphi_1(t, t_0) \dots \varphi_n(t, t_0)] \tag{II.14}$$

la (II.13) si può scrivere:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\, \mathbf{x}_0 \tag{II.15}$$

È spesso conveniente, per sottolineare il fatto che $\mathbf{x}_0$ è il valore assunto dallo stato all'istante t_0, indicarlo con $\mathbf{x}(t_0)$ e riscrivere quindi la (II.15) nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\, \mathbf{x}(t_0) \tag{II.16}$$

Questa è la forma particolare cui si riduce la (II.8) per i sistemi lineari. Essa poteva essere dedotta immediatamente basandosi sul fatto che una applicazione lineare di uno spazio lineare a dimensione finita in se stesso (in questo caso di X in X) può essere sempre rappresentata da una matrice (in questo caso $n \times n$). La matrice (II.14) viene detta *matrice di transizione* dello stato in quanto consente il calcolo della transizione da uno stato all'altro nell'evoluzione libera.

Essa, oltre a caratterizzare in modo completo questo particolare regime, ha un ruolo fondamentale in tutto il comportamento del sistema, come risulterà chiarito in seguito.

II.3 - Risposta forzata nello stato.

In questo paragrafo si condurrà un'analisi analoga a quella del paragrafo procedente, riferendosi però alla risposta forzata nello stato, esaminando come si particolarizza la relazione:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{0}, \mathbf{u}|_{(t_0, t]}) \tag{II.17}$$

Questa volta il valore dello stato dipende da tutti i valori assunti dalla funzione $\mathbf{u}$ sull'intervallo $(t_0, t]$; esso è cioè un *funzionale* definito sullo spazio $\mathcal{U}$ delle funzioni di ingresso.

Per ottenere una rappresentazione analitica del funzionale (II.17), nell'ipotesi di linearità, ci si può avvalere dei risultati dell'analisi funzionale e precisamente del teorema di Riesz. Supposto che lo spazio $\mathcal{U}$ delle funzioni di ingresso coincida con lo spazio delle funzioni continue su R, si può scrivere[1]:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t, \tau)\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau} \tag{II.18}$$

dove $\mathbf{H}$ è una matrice $n \times p$ di funzioni di due variabili definita su $(R \times R)^*$. Questo integrale viene detto *integrale di convoluzione* e la funzione $\mathbf{H}$ suo *nucleo*.

Le singole colonne della matrice $\mathbf{H}$ hanno un'interessante interpretazione in termini di risposte forzate a particolari ingressi. Si consideri infatti un'ingresso del tipo:

$$\text{i-esima posizione} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \delta_n(t - \tau) \tag{II.19}$$

ove la funzione $\delta_n(\xi)$ è definita da (cfr. anche fig.II.1).

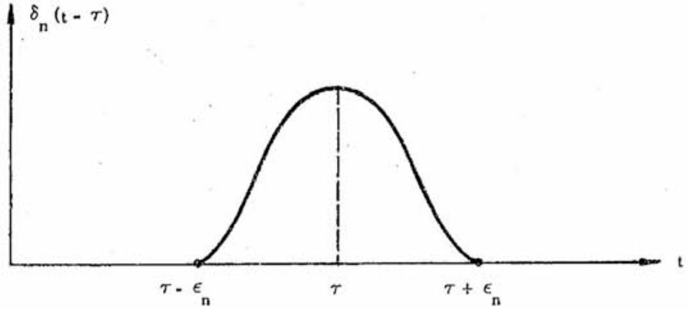

Fig.II.1

(1) - Si veda in proposito il testo di P.Lévy: *Problèmes Concrets d'Analyse Fonctionnelle,* Gauthier-Villars (Paris), 1951.

$$\delta_n(\xi) = \begin{cases} 0 & (-\infty < \xi \le -\epsilon_n) \\ \dfrac{1}{\displaystyle\int_{-\epsilon_n}^{\epsilon_n} e^{-1/(\epsilon_n^2 - t^2)}\, dt}\, e^{-1/(\epsilon_n^2 - \xi^2)} & (-\epsilon_n \le \xi \le \epsilon_n) \\ 0 & (\epsilon_n \le \xi < \infty) \end{cases} \tag{II.20}$$

ed $\{\epsilon_n\}$ è una successione di numeri positivi, decrescente ed infinitesima.

La corrispondente risposta nello stato, per la (II.18) e (II.19) sarà data (denominando la variabile di integrazione con ξ) da:

$$\mathbf{x}_n(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{h}_i(t, \xi)\, \delta_n(\xi - \tau)\, d\xi \tag{II.21}$$

essendo $\mathbf{h}_i$ l'i-esima colonna della matrice $\mathbf{H}$. Si supponga ora $t_0 < \tau < t$; facendo tendere n all'infinito, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{h}_i(t, \tau) \tag{II.22}$$

Si può dunque affermare che le singole colonne della matrice $\mathbf{H}$ coincidono con i limiti delle successioni di risposte a segnali del tipo (II.19).

Come è ben noto[1], le successioni del tipo (II.20) definiscono una *distribuzione di Dirac* $\delta(t - \tau)$, (*impulso unitario* applicato all'istante τ). Volendo ottenere una interpretazione di $\mathbf{H}$ con riferimento alle distribuzioni, si può procedere nel seguente modo: arricchire lo spazio delle funzioni di ingresso $\mathcal{U}$ passando ad uno spazio comprendente le distribuzioni, rappresentare la (II.17) ancora con una espressione del tipo (II.18) avvalendosi di una opportuna estensione del teorema di Riesz[2] e considerare la risposta nello stato ad un ingresso (questa volta ammissibile) del tipo:

(1) - Si veda in proposito il testo di A. Ghizzetti - L. Marchetti - A. Ossicini: *Lezioni di Complementi di Analisi Matematica,* Veschi (Roma), 1972.

(2) - Cfr. nota a pag.38.

$$
\text{(II.23)} \qquad \text{i-esima posizione} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t - \tau)
$$

Una tale impostazione consente di interpretare le colonne di $\mathbf{H}$ come risposte ad opportuni impulsi; per tale ragione la matrice $\mathbf{H}$ viene detta *matrice delle risposte impulsive nello stato*.

Con riferimento a questa interpretazione è bene sottolineare che il valore $\mathbf{h}_i(t, \tau)$ assunto dallo stato all'istante t per effetto di un ingresso impulsivo del tipo (II.23), applicato cioè all'istante τ, è in ge-

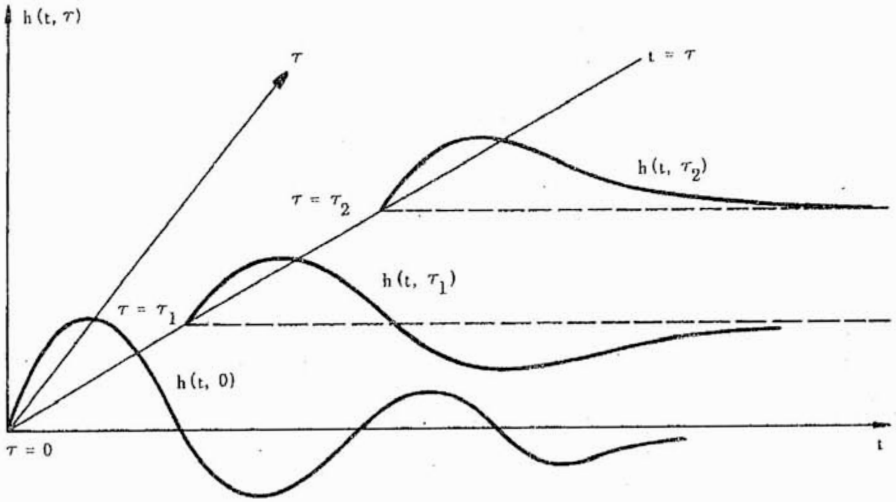

Fig.II.2

nerale dipendente dal valore di tale istante. Si osservi in proposito la fig.II.2, relativa a $n = p = 1$.

II.4 - Implicazioni delle proprietà della funzione di transizione dello stato.

Sulla base della Proposizione II.1, utilizzando la (II.6) e tenendo presente che, per i sistemi lineari, i due termini a secondo membro di questa assumono rispettivamente le espressioni (II.16) e (II.18), si ottiene, per la risposta nello stato, la seguente espressione:

$$
\text{(II.24)} \qquad \mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\, \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t, \tau)\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau
$$

La (II.24), che è una rappresentazione particolare della funzione di transizione dello stato, deve naturalmente soddisfare alle proprietà di unicità e causalità, consistenza e separazione (cfr. Capitolo I). La prima, *unicità e causalità*, risulta senz'altro soddisfatta per la struttura stessa dell'espressione e ciò è del resto ovvia conseguenza dell'avere imposto già nella (II.1) la dipendenza di $\mathbf{x}(t)$ dai soli valori di $\mathbf{u}$ relativi all'intervallo $(t_0, t]$. Le altre due proprietà, invece, implicano un certo numero di conseguenze sulle matrici Φ ed $\mathbf{H}$, che saranno appunto esaminate in questo paragrafo.

Per la proprietà di *consistenza*, applicando la (I.16) alla (II.24) e cioè ponendo $t_0 = t$, si ha:

$$
\text{(II.25)} \qquad \mathbf{x}(t) = \Phi(t, t)\, \mathbf{x}(t)
$$

Poichè $\mathbf{x}(t)$ è un vettore arbitrario, questa può essere soddisfatta se e solo se:

$$
\text{(II.26)} \qquad \Phi(t, t) = \mathbf{I} \qquad \forall t \in R
$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità $n \times n$.

Per la proprietà di *separazione* (I.17) si ha, con $t_1 \in (t_0, t)$:

$$
\begin{aligned}
\text{(II.27)} \qquad \Phi(t, t_0)\, \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t, \tau)\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau &= \\
= \Phi(t, t_1) \left[\Phi(t_1, t_0)\, \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{H}(t_1, \tau)\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau \right] &+ \\
+ \int_{t_1}^{t} \mathbf{H}(t, \tau)\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau &
\end{aligned}
$$

Questa deve essere valida per ogni $\mathbf{u}$, quindi in particolare anche per $\mathbf{u} = \mathbf{0}$; in quest'ultimo caso, perchè si realizzi l'uguaglianza del primo e secondo membro per ogni $\mathbf{x}(t_0)$, dovrà essere:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\, \Phi(t_1, t_0) \qquad \forall (t, t_0) \in (R \times R)^* \quad ; \quad \forall t_1 \in (t_0, t) \tag{II.28}$$

Questa proprietà, insieme con la (II.26), viene detta *proprietà di semigruppo*[1].

Ove si tenga presente (cfr. Definizione I.6) che, nell'evoluzione libera ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$), le proprietà che caratterizzano la funzione di transizione dello stato sono solo quelle di consistenza e di separazione, ci si rende conto che per i sistemi lineari la proprietà di semigruppo caratterizza la classe degli operatori lineari che trasformano lo spazio di stato in se stesso nell'evoluzione libera.

Ponendo ora nella (II.27) $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ e decomponendo l'integrale a primo membro nella somma di due integrali, estesi rispettivamente a $(t_0, t_1]$ e $(t_1, t]$, si ottiene (denominando la variabile di integrazione con ξ):

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{H}(t, \xi)\, \mathbf{u}(\xi)\, d\xi = \Phi(t, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{H}(t_1, \xi)\, \mathbf{u}(\xi)\, d\xi \qquad \forall (t, t_0) \in (R \times R)^* \quad ; \quad \forall t_1 \in (t_0, t) \tag{II.29}$$

Se si sceglie $u(\xi) = \delta(\xi - \tau)$, con τ interno all'intervallo (t_0, t_1), si ha:

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \Phi(t, t_1)\, \mathbf{H}(t_1, \tau) \qquad \forall (t, \tau) \in (R \times R)^* \quad ; \quad \forall t_1 \in (t, \tau) \tag{II.30}$$

Tenendo presente l'interpretazione di ciascuna colonna di $\mathbf{H}(t,\tau)$ come risposta dello stato ad un opportuno ingresso impulsivo (a partire dallo stato $\mathbf{x} = \mathbf{0}$), la (II.30) suggerisce le seguenti osservazioni. Il valore dello stato $\mathbf{h}_i(t, \tau)$ assunto all'istante t in regime forzato per l'applicazione dell'ingresso impulsivo (II.23) può essere interpretato come valore assunto in evoluzione libera a partire dallo stato $\mathbf{h}_i(t_1, \tau)$ raggiunto ad un qualsiasi istante intermedio $t_1 < t$ sotto l'effetto dello stesso ingresso (II.23). In altri termini, salvo che nell'istante di applicazione dell'impulso, le colonne di $\mathbf{H}$ sono coincidenti con opportune risposte in evoluzione libera. Viene così posto in evidenza un legame molto stretto della matrice che caratterizza il regime forzato con la matrice di transizione che caratterizza il regime libero.

(1) - Tale denominazione è dovuta al fatto che, per le (II.26) e la (II 28), l'insieme di matrici $\{\Phi(t, \tau) : (t, \tau) \in (R \times R)^*\}$ è un semigruppo rispetto all'operazione di prodotto tra matrici.

II.5 - Sistemi differenziali.

È interessante considerare la classe dei sistemi lineari in cui sono soddisfatte opportune ipotesi di continuità e derivabilità sulle funzioni Φ ed $\mathbf{H}$. Più precisamente si supponga che, *per ogni valore di* τ, esista la derivata parziale prima rispetto a t della funzione $\Phi(t, \tau)$ nel punto $t = \tau$ e cioè si possa porre:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} [\Phi(\tau + \epsilon, \tau) - \Phi(\tau, \tau)] = \mathbf{A}(\tau) \tag{II.31}$$

essendo $\mathbf{A}$ una matrice $n \times n$ di funzioni di τ, definita per tutti i $\tau \in R$.

Si può anzitutto dimostrare che, grazie alla proprietà di semigruppo, la $\Phi(t, \tau)$ è dotata di derivata parziale rispetto a t in ogni punto di $(R \times R)^*$; infatti si può scrivere:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} [\Phi(t + \epsilon, \tau) - \Phi(t, \tau)] = \tag{II.32}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} [\Phi(t + \epsilon, t) - \Phi(t, t)]\, \Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t)\, \Phi(t, \tau)$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto della ipotesi (II.31). La (II.32) si può anche scrivere nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t)\, \Phi(t, \tau) \qquad \forall (t, \tau) \in (R \times R)^* \tag{II.33}$$

Pertanto si può dire che per ogni valore di τ la matrice di transizione è soluzione di una equazione differenziale matriciale del primo ordine, lineare, omogenea; la condizione iniziale in questa è $\Phi(\tau, \tau) = \mathbf{I}$ [cfr. (II.26)].

Per quanto riguarda la matrice $\mathbf{H}(t, \tau)$, si farà l'ipotesi che, per *ogni valore di* τ, essa sia continua rispetto a t nel punto $t = \tau$ e cioè si possa porre:

$$\lim_{t \to \tau} \mathbf{H}(t, \tau) = \mathbf{H}(\tau, \tau) = \mathbf{B}(\tau) \tag{II.34}$$

essendo $\mathbf{B}$ una matrice $n \times p$ di funzioni di τ, definite per tutti i $\tau \in R$.

Si calcoli ora il limite nella (II.30), per $t_1 \to \tau$. Esso esiste in quanto Φ è continua rispetto a t in ogni punto (grazie alla (II.33) che ne assicura la derivabilità) ed in quanto $\mathbf{H}$ soddisfa alla (II.34). Si può perciò scrivere:

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}(t, \tau) = \Phi(t, \tau)\, \mathbf{B}(\tau) \\ &\forall (t, \tau) \in (R \times R)^* \end{aligned} \tag{II.35}$$

Questa relazione consente di precisare ulteriormente, per i sistemi che si stanno considerando, il legame tra la matrice delle risposte impulsive nello stato e la matrice di transizione, confermando quanto già osservato a proposito dello stretto legame tra la risposta libera e quella forzata.

I risultati fin qui acquisiti consentono di provare che l'intera funzione di transizione $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}|_{(t_0, t]})$, soddisfa ad una equazione differenziale del primo ordine. Allo scopo si può partire dalla espressione (II.24) di $\mathbf{x}(t)$, calcolando la derivata rispetto a t di ambo i membri. Tenendo presente la (II.33) e la (II.35), si ottiene [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = {} & \mathbf{A}(t)\, \Phi(t, t_0)\, \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{B}(t)\, \mathbf{u}(t) + \\ & + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(t)\, \Phi(t, \tau)\, \mathbf{B}(\tau)\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{II.36}$$

Tenendo presente ancora la (II.24) si ha in definitiva:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\, \mathbf{u}(t) \tag{II.37}$$

Si può quindi affermare che, nelle ipotesi assunte per le matrici Φ e $\mathbf{H}$, *la funzione di transizione dello stato è soluzione della equazione differenziale vettoriale* (II.37) con la condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

(1) - Per la derivazione del secondo addendo nella (II.24) occorre tenere presente che:

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(t, \tau)\, d\tau = f(t, t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau)\, d\tau$$

Può essere utile sottolineare che il contemporaneo verificarsi delle proprietà caratterizzanti la funzione di transizione dello stato (unicità e causalità, consistenza e separazione) e delle proprietà di continuità e derivabilità di Φ e di $\mathbf{H}$ implica che la velocità di variazione dello stato in un certo istante risulti funzione *solo* dei valori dello stato e dell'ingresso al medesimo istante. In proposito va osservato che una tale proprietà può sussistere anche per sistemi non - lineari; in tali casi la funzione di transizione dello stato è soluzione (unica) di una equazione differenziale vettoriale non lineare del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\,[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \tag{II.38}$$

della quale la (II.37) appare allora come un caso particolare.

I sistemi così individuati, che vengono detti *differenziali*, hanno una notevole importanza, in quanto corrispondono ad un'ampia classe di oggetti fisici che si incontrano nelle applicazioni.

Le considerazioni svolte pongono quindi in luce l'interesse allo studio delle equazioni differenziali per la teoria dei sistemi; per tale motivo in Appendice A.II.1 sono riportati i risultati essenziali relativi alla soluzione di equazioni differenziali del tipo (II.37). Tali risultati forniscono anche una espressione analitica esplicita delle funzioni Φ ed $\mathbf{H}$. In effetti, a questo scopo basta limitarsi a considerare l'espressione di Φ, alla quale quella di $\mathbf{H}$ è legata dalla (II.35). La matrice di transizione soddisfa all'equazione differenziale matriciale (II.33), con condizione iniziale $\Phi(\tau, \tau) = \mathbf{I}$ e quindi, se $\mathbf{A}(t)$ è una matrice di funzioni continue, è data da (cfr. Appendice A.II.1).

$$\begin{aligned} &\Phi(t, \tau) = \mathbf{I} + \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\, d\tau_1 + \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\tau_1) \int_{\tau}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\, d\tau_2\, d\tau_1 + \ldots \\ &\forall (t, \tau) \in (R \times R)^* \end{aligned} \tag{II.39}$$

Tale sviluppo converge assolutamente per ogni t finito ed uniformemente su ogni intervallo chiuso di R.

II.6 - La trasformazione in uscita.

In questo paragrafo si esaminerà come si particolarizza la (II.2) introducendo l'ipotesi di linearità.

Tenendo conto della definizione II.1, si ha immediatamente, per la linearità di η sul prodotto $X \times U$,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t) \tag{II.40}$$

dove $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ sono matrici, rispettivamente $q \times n$ e $q \times p$, di funzioni del tempo, definite per tutti i $t \in R$.

Questa equazione, e la (II.24), che fornisce l'evoluzione dello stato, costituiscono una descrizione completa per un sistema lineare. Può essere utile tuttavia disporre di una espressione in cui l'uscita all'istante t risulti espressa *direttamente* in funzione dello stato iniziale e dell'ingresso tra t_0 e t. Ciò si ottiene sostituendo la (II.24) nella (II.40):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\Phi(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{C}(t)\,\mathbf{H}(t, \tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t) \tag{II.41}$$

Una ulteriore utile trasformazione consiste nel porre:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\Phi(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\mathbf{C}(t)\,\mathbf{H}(t, \tau) + \mathbf{D}(t)\,\delta(t-\tau)]\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{II.42}$$

o anche:

$$\mathbf{y}(t) = \Psi(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}(t, \tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{II.43}$$

avendo introdotto le funzioni:

$$\Psi(t, t_0) = \mathbf{C}(t)\,\Phi(t, t_0) \tag{II.44}$$

$$\mathbf{W}(t, \tau) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{H}(t, \tau) + \mathbf{D}(t)\,\delta(t-\tau) \tag{II.45}$$

Si osservi che la struttura del tipo (II.43) può essere ottenuta anche direttamente come conseguenza dell'ipotesi di linearità della funzione composta (II.7) sul prodotto $X \times \mathcal{U}$, con considerazioni analoghe a quelle svolte per la funzione (II.1) nei paragrafi 2 e 3. La strada qui seguita ha però consentito anche, grazie alla particolare struttura della trasformazione in uscita, di determinare i legami di Ψ con Φ e di $\mathbf{W}$ con $\mathbf{H}$.

La matrice Ψ caratterizza la risposta libera nell'uscita e non ha una denominazione particolare; la matrice $\mathbf{W}$ caratterizza la risposta forzata nell'uscita e viene detta *matrice delle risposte impulsive.*

Dato il legame che sussiste tra $\mathbf{H}$ e Φ [cfr. (II.30)] si può scrivere, tenendo conto anche della (II.44):

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(t, \tau) &= \mathbf{C}(t)\,\Phi(t, t_1)\,\mathbf{H}(t_1, \tau) + \mathbf{D}(t)\,\delta(t-\tau) = \\ &= \Psi(t, t_1)\,\mathbf{H}(t_1, \tau) + \mathbf{D}(t)\,\delta(t-\tau) \\ &\forall\,(t, \tau) \in (R \times R)^* \;; \qquad \forall t_1 \in (\tau, t)\end{aligned} \tag{II.46}$$

Si osservi che la matrice delle risposte impulsive, le cui colonne sono interpretabili come risposte – nell'uscita – ad opportuni ingressi di tipo impulsivo applicati all'istante τ, contiene essa stessa impulsi centrati all'istante τ. Questo è conseguenza del legame diretto o istantaneo tra uscita ed ingresso e rappresentato, nella (II.40), dalla matrice $\mathbf{D}(t)$. Quando questa è nulla il sistema viene detto *strettamente proprio.*

A questo proposito conviene precisare che, nel caso generale, i sistemi qui considerati vengono detti *propri*; questa denominazione è giustificata dal fatto che alcuni autori prendono in considerazione anche sistemi nei quali l'uscita ad un istante t dipende dai valori assunti da derivate di $\mathbf{u}(t)$ al medesimo istante t, cioè tali che:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}^{(1)}(t), \dots, t) \tag{II.47}$$

Tali sistemi vengono detti *impropri.*

Per i sistemi strettamente propri si può dunque concludere, sulla base della (II.46), che *la matrice delle risposte impulsive* $\mathbf{W}(t, \tau)$ *risulta esprimibile come prodotto di due fattori* di cui uno è funzione della sola variabile t, oltre che di un parametro t_1, e l'altro funzione dello stesso parametro t_1 e della sola variabile τ. Tali fattori sono proprio la matrice $\mathbf{H}$ che caratterizza la risposta forzata ingresso-stato e la matrice Ψ che caratterizza la risposta libera stato-uscita.

II.7 - Considerazioni sui modelli dei sistemi differenziali.

Dalla trattazione qui svolta emerge che, un sistema differenziale lineare può essere descritto attraverso due tipi diversi di enti matematici:

a) le funzioni φ ed η, che assumono la particolare forma (II.24) e (II.40) [o anche la forma (II.24) e (II.43)] o, il che è lo stesso, le matrici $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$, $\mathbf{H}(t,\tau)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ [ovvero le matrici $\Phi(t,\tau)$, $\mathbf{H}(t,\tau)$, $\Psi(t,\tau)$, $\mathbf{W}(t,\tau)$];

b) la equazione differenziale (II.37) e la funzione η, o, il che è lo stesso, le matrici $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$.

I due *modelli matematici* che così vengono ad essere individuati possono essere indicati, per brevità, come *modello esplicito* e, rispettivamente, *modello implicito* o *differenziale*.

Entrambi questi modelli sono di notevole interesse nello studio dei sistemi lineari. Per il primo, basti pensare che esso consente il calcolo esplicito dei valori assunti dallo stato e dell'uscita al variare del tempo, una volta prefissato lo stato iniziale e l'andamento nel tempo dell'ingresso. L'interesse del secondo risiede nella possibilità di far corrispondere ad esso uno schema realizzativo.

Per illustrare questo punto si supponga di disporre di organi atti a:

- effettuare la somma di funzioni del tempo (*sommatori*);
- effettuare l'integrazione di una funzione del tempo (*integratori*);
- generare una prefissata funzione del tempo (*generatori di funzione*)(1);
- effettuare il prodotto tra funzioni del tempo (*moltiplicatori*).

Disponendo di un numero adeguato (e finito) di tali organi è possibile, come è facile rendersi conto attraverso la semplice esplicitazione delle operazioni implicate, effettuare le seguenti operazioni:

- moltiplicare una grandezza vettoriale, funzione del tempo, per una matrice di coefficienti i cui elementi siano a loro volta assegnate funzioni del tempo;
- sommare due grandezze vettoriali funzioni del tempo;
- effettuare l'integrale indefinito di una grandezza vettoriale funzione del tempo.

(1) - Tali organi sono necessari per generare le funzioni del tempo corrispondenti ai coefficienti dell'equazione differenziale alla quale si vuole associare lo schema realizzativo. Ove tali coefficienti fossero costanti tali organi non sarebbero necessari e quelli previsti al punto successivo andrebbero sostituiti con organi atti ad effettuare il prodotto tra una funzione del tempo ed una costante.

Queste ultime operazioni si possono rappresentare come indicato nella fig.II.3.

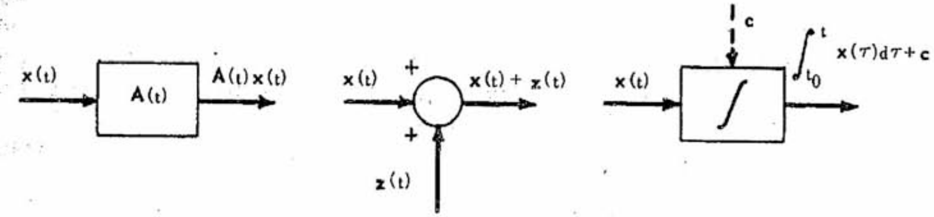

Fig.II.3

Servendosi della simbologia così introdotta si può allora associare alle equazioni (II.37) e (II.40) lo schema di fig.II.4(1).

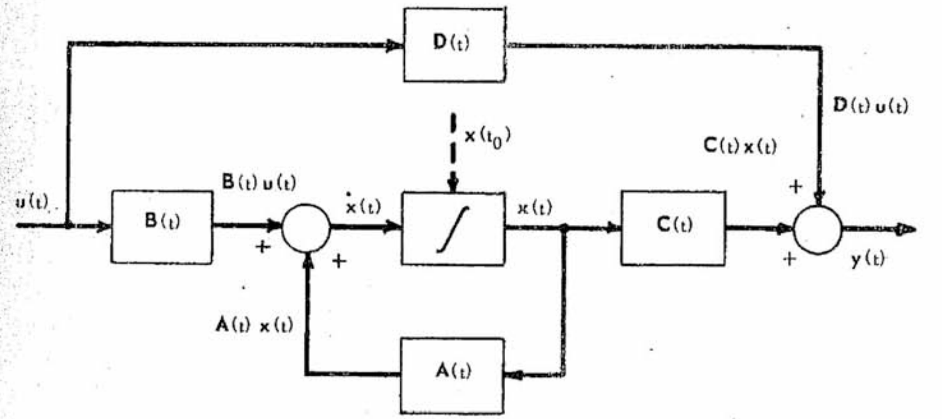

Fig.II.4

(1) - Si coglie l'occasione per sottolineare come lo schema espliciti in maniera molto chiara l'eventuale influenza di un legame diretto tra ingresso ed uscita [matrice $\mathbf{D}(t)$] e quindi la differenza tra sistemi propri e sistemi strettamente propri (cfr. paragrafo 6).

Infatti i due sommatori stabiliscono i vincoli corrispondenti alle due equazioni e la consistenza tra le diverse grandezze è assicurata mediante le operazioni rappresentate dai blocchi.

Si può dunque concludere che la disponibilità del modello matematico nella forma b) per un assegnato sistema astratto orientato rende possibile, ove lo si voglia, realizzare un oggetto fisico corrispondente mediante un numero finito di sommatori, integratori, generatori di funzione e moltiplicatori. In altri termini si può dire che tale disponibilità rende possibile un procedimento di sintesi.

Giustificato così l'interesse ad ambedue i modelli a) e b), risulta chiara l'importanza dei *metodi di trasformazione* dall'uno all'altro. Si supponga infatti di disporre del modello differenziale - il che si verifica tutte le volte che il modello matematico viene dedotto attraverso un'analisi dall'interno dell'oggetto in esame (ad esempio, quando, per una rete elettrica, si scrivono le equazioni di equilibrio ai nodi e alle maglie, ecc.) - e di volere effettuare il calcolo esplicito degli andamenti dello stato e/o dell'uscita. Si tratta allora di passare dal modello b) al modello a), cioè di risolvere l'equazione differenziale (II.37). Inversamente, se si dispone del modello esplicito - in quanto, ad esempio, sono stati prefissati gli andamenti nel tempo delle grandezze che caratterizzano il sistema - e si desidera trovare uno schema realizzativo, il passaggio al modello differenziale può essere utile in base alle considerazioni sopra effettuate.

Le trasformazioni da un modello all'altro si possono effettuare utilizzando i risultati stabiliti nei paragrafi precedenti. Per comodità tuttavia si riportano tutte le formule di interesse nella tabella II.1.

A conclusione si ritiene utile far rilevare che, nell'approccio seguito in questo capitolo, la struttura del modello esplicito, le funzioni che lo caratterizzano e le rispettive proprietà sono state dedotte (cfr. paragrafi 1-4) partendo dalla definizione di sistema e dall'ipotesi di linearità. È chiaro però che, nei sistemi differenziali, è possibile seguire un procedimento diverso che consiste nel dedurre il modello esplicito dall'equazione differenziale, come sua soluzione. Nell'Appendice A.II.1 sono riportati tutti gli elementi che consentono questo diverso approccio e che permettono anche di dare alcune precisazioni importanti sui domini di definizione delle funzioni che caratterizzano il sistema (quale, ad esempio, la matrice di transizione).

TABELLA II.1

Modello esplicito	Modello differenziale
$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t, \tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t) =$ $= \Psi(t, t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t, \tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t)$
Passaggio al modello differenziale	**Passaggio al modello esplicito**
$\mathbf{A}(t) = \left[\dfrac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t}\right]_{\tau = t}$ $\mathbf{B}(t) = \mathbf{H}(t, t)$ $\mathbf{C}(t) = \Psi(t, t)$ $\mathbf{D}(t) = \int_0^{\epsilon} [W(t, \tau) - \mathbf{C}(t)\,\Phi(t, \tau)\,\mathbf{B}(\tau)]\,d\tau$	$\Phi(t, \tau) = I + \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\,d\tau_1 +$ $+ \int_{\tau}^{t} \mathbf{A}(\tau_1) \int_{\tau}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\,d\tau_2\;d\tau_1 + \dots$ $\mathbf{H}(t, \tau) = \Phi(t, \tau)\,\mathbf{B}(\tau)$ $\Psi(t, \tau) = \mathbf{C}(t)\,\Phi(t, \tau)$ $W(t, \tau) = \mathbf{C}(t)\,\Phi(t, \tau)\,\mathbf{B}(\tau) +$ $+ \mathbf{D}(t)\,\delta(t - \tau)$

II.8 - Sistemi stazionari.

La definizione di stazionarietà (o invarianza nel tempo) verrà data in analogia a quanto si è fatto per quella di linearità, riferendosi alla descrizione ingresso-stato-uscita. Per dare questa definizione conviene formalizzare l'operazione di traslazione per le funzioni di una variabile; riferendosi al caso, che qui interessa, di funzioni definite sull'insieme T, si definisce come *traslazione* (di ampiezza Δ) di un'assegnata funzione $u \in U^T$ la funzione $[\delta_\Delta u]$, ancora appartenente a U^T, tale che:

$$[\delta_\Delta u](t) = \begin{cases} u(t-\Delta) & (t-\Delta) \in T \\ 0 & (t-\Delta) \notin T \end{cases} \tag{II.48}$$

Una esemplificazione di questa definizione è data in figura II.5, con riferimento al caso in cui $U = R$ e T è l'insieme dei numeri reali positivi.

Per definire la stazionarietà occorre inoltre assumere che l'insieme $\mathcal{U}$ che interviene nella definizione di φ contenga tutte le traslazioni (per ogni possibile valore di Δ) di ogni funzione appartenente allo insieme stesso (*chiusura rispetto alla traslazione*). Ciò premesso, ricordando che si è scelto $T = R$, si può dare la seguente:

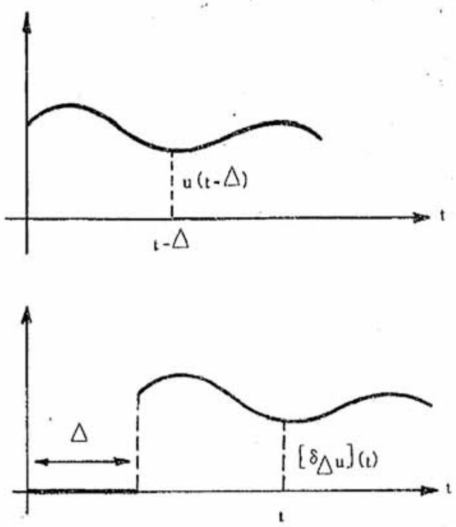

Fig.II.5

Definizione II.2. Il sistema descritto dalle (II.1) e (II.2) è *stazionario* se:

$$\begin{aligned} &\varphi(t+\Delta, t_0+\Delta, \mathbf{x}_0, [\delta_\Delta \mathbf{u}]|_{(t_0+\Delta, t+\Delta]}) = \\ &= \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}|_{(t_0,t]}) \\ &\eta(t+\Delta, [\delta_\Delta \mathbf{x}](t+\Delta), [\delta_\Delta \mathbf{u}](t+\Delta)) = \eta(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ &\forall (t, t_0) \in (R \times R)^*, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in X, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \forall \Delta \end{aligned} \tag{II.49}$$

Si esamineranno ora le implicazioni della proprietà di stazionarietà sulla struttura dei modelli di un sistema lineare e sulle matrici che in essi compaiono. Applicando la (II.49) per $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e tenendo conto che per la linearità vale la (II.16) si ha:

$$\Phi(t+\Delta, t_0+\Delta)\, \mathbf{x}_0 = \Phi(t, t_0)\, \mathbf{x}_0, \qquad \forall \Delta \tag{II.50}$$

Scegliendo $\Delta = -t_0 + \Delta'$ si ha ancora:

$$\Phi(t - t_0 + \Delta', \Delta')\, \mathbf{x}_0 = \Phi(t, t_0)\, \mathbf{x}_0 \qquad \forall \Delta' \tag{II.51}$$

Questa formula, poichè il primo membro ha lo stesso valore per qualunque Δ', pone in luce che il valore assunto dallo stato all'istante t a partire uno stato iniziale in t_0 dipende *solo dalla differenza* $t - t_0$.

Applicando ora la (II.49) per $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ed $\mathbf{u}(t)$ definito dalla (II.23) e tenendo conto che per la linearità vale la (II.18), si ha:

$$\mathbf{h}_i(t+\Delta, \tau+\Delta) = \mathbf{h}_i(t, \tau) \tag{II.52}$$

Da questa, come visto immediatamente sopra per la matrice di transizione, si può trarre la conclusione che ogni colonna di $\mathbf{H}$ e quindi la matrice stessa *dipende solo dalla differenza* $t - \tau$. In proposito è interessante osservare come si modifica la rappresentazione grafica di figura II.3; questa volta (cfr. fig.II.6) le diverse funzioni si ottengono tutte per traslazione di una qualsiasi di esse.

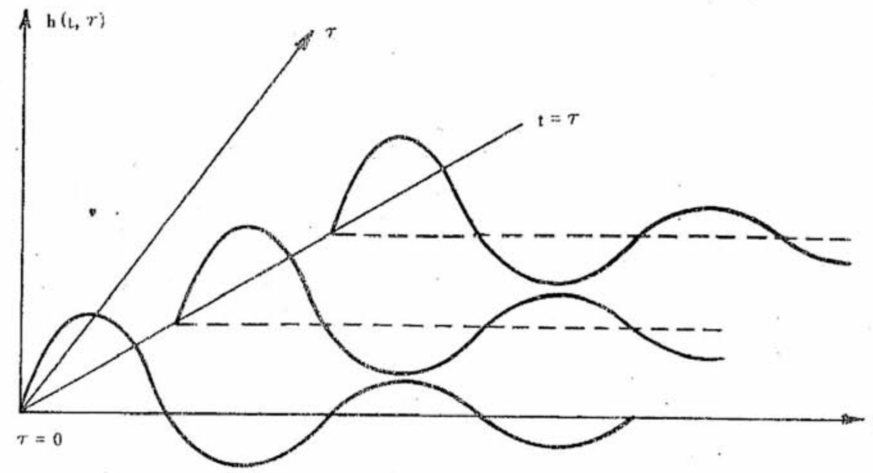

Fig.II.6

Se il sistema è anche differenziale[1] i risultati trovati nel paragrafo 5 si particolarizzano in una forma di notevole interesse. Anzitutto

(1) - E' interessante notare che, nei sistemi lineari e stazionari, è possibile dimostrare come la sola ipotesi di continuità di $\Phi(t,\tau)$ rispetto a t nel punto $t = \tau$ assicuri la esistenza della derivata (II.31) e quindi continuità e derivabilità in ogni punto.

si ha che la derivata (II.31) è *costante* (grazie al fatto che $\Phi(t, \tau)$ è funzione solo di $t - \tau$); in conseguenza di ciò la serie (II.39) diventa:

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-\tau) + \mathbf{A}^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \ldots = \tag{II.53}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(t-\tau)^i}{i!}$$

Come tale, soddisfa all'equazione differenziale [cfr. (II.33)]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \tau) = \mathbf{A}\, \Phi(t, \tau) \tag{II.54}$$

Analogamente, anche la matrice (II.34) è costante; di conseguenza la (II.35) diventa:

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \Phi(t, \tau)\, \mathbf{B} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(t-\tau)^i}{i!} \right] \mathbf{B} \tag{II.55}$$

L'equazione differenziale (II.37) ovviamente diviene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \tag{II.56}$$

Per quanto riguarda la trasformazione in uscita, applicando ancora la definizione di stazionarietà alla (II.40), si ottiene:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \tag{II.57}$$

Con riferimento al modello esplicito, per completezza, si riportano anche le espressioni di Ψ e $\mathbf{W}$, ottenute particolarizzando rispettivamente la (II.44) e (II.46).

$$\Psi(t, t_0) = \mathbf{C} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(t-t_0)^i}{i!} \right] \tag{II.58}$$

$$\mathbf{W}(t, \tau) = \mathbf{C} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(t-\tau)^i}{i!} \right] \mathbf{B} + \mathbf{D}\,\delta(t-\tau) \tag{II.59}$$

II.9 - Trasformazioni di coordinate nello spazio di stato.

La rappresentazione delle funzioni φ ed η dipende, come peraltro è già stato osservato nel Capitolo I, dalla scelta di un sistema di coordinate nello spazio di stato. Pertanto, da essa dipendono anche le matrici che, nel caso dei sistemi lineari, intervengono nella rappresentazione di queste funzioni. È molto importante esaminare i legami tra le diverse rappresentazioni che vengono in tal modo a corrispondere ad uno stesso sistema.

Come è noto, i vettori aventi per componenti le coordinate di un medesimo elemento di uno spazio lineare ad n-dimensioni rispetto a due diversi sistemi di coordinate sono legati tra di loro da una matrice $n \times n$ non singolare. Se $\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ sono vettori corrispondenti valgono pertanto le relazioni:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(t)\,\mathbf{x} \tag{II.60}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(t)\,\hat{\mathbf{x}} \tag{II.61}$$

Si sottolinea che la matrice di trasformazione può essere funzione del tempo e ciò in quanto è ammissibile considerare trasformazioni di coordinate diverse da istante ad istante.

In conseguenza di tali relazioni, in luogo della (II.1) e (II.2) si hanno le:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}(t)\,\varphi(t, t_0, \mathbf{T}^{-1}(t_0)\,\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}|_{(t_0,t]}) \tag{II.62}$$

$$\mathbf{y}(t) = \eta(t, \mathbf{T}^{-1}(t)\,\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{II.63}$$

Particolarizzando la (II.62) per il caso dei sistemi lineari si ottiene ancora [cfr. (II.24)]:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}(t)\,\Phi(t, t_0)\,\mathbf{T}^{-1}(t_0)\,\hat{\mathbf{x}}(t_0) + \mathbf{T}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t, \tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \tag{II.64}$$

$$= \hat{\Phi}(t, t_0)\,\hat{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \hat{\mathbf{H}}(t, \tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

avendo definito la nuova matrice di transizione e la nuova matrice delle risposte impulsive nello stato con le relazioni:

$$\hat{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{T}(t)\,\Phi(t, t_0)\,\mathbf{T}^{-1}(t_0) \tag{II.65}$$

$$\hat{\mathbf{H}}(t, \tau) = \mathbf{T}(t)\,\mathbf{H}(t, \tau) \tag{II.66}$$

Particolarizzando la (II.63) si ha, in modo analogo [cfr. (II.40)]:

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}(t)\,\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{D}}(t)\,\mathbf{u}(t) \tag{II.67}$$

ove:

$$\hat{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{T}^{-1}(t) \tag{II.68}$$

$$\hat{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{D}(t) \tag{II.69}$$

Infine considerando la composizione delle funzioni (II.63) e (II.62) si ottiene, per quanto riguarda l'espressione diretta dell'uscita in funzione dello stato iniziale e dell'ingresso [cfr. (II.43)]:

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\Psi}(t, t_0)\,\hat{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \hat{\mathbf{W}}(t, \tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{II.70}$$

con:

$$\hat{\Psi}(t, t_0) = \Psi(t, t_0)\,\mathbf{T}^{-1}(t_0) \tag{II.71}$$

$$\hat{\mathbf{W}}(t, \tau) = \mathbf{W}(t, \tau) \tag{II.72}$$

Nel caso dei sistemi differenziali, in cui vale l'equazione differenziale (II.37), volendo mantenere le proprietà di continuità e derivabilità dello stato, occorre che la matrice $\mathbf{T}(t)$ sia continua e derivabile per ogni t.

In tal caso l'equazione diventa:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}(t)\,\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}(t)\,\mathbf{u}(t) \tag{II.73}$$

con:

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\,\mathbf{T}^{-1}(t) + \mathbf{T}(t)\,\mathbf{A}(t)\,\mathbf{T}^{-1}(t) \tag{II.74}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{T}(t)\,\mathbf{B}(t) \tag{II.75}$$

A queste due ultime relazioni si possono associare tutte le altre prima stabilite, aggiungendo la condizione che la $\mathbf{T}(t)$ in esse presente risulti continua e derivabile.

Le relazioni tra le rappresentazioni ora esaminate sono evidentemente relazioni di *equivalenza* (cfr. Appendice al Capitolo I); nel caso in cui $\mathbf{T}(t)$ sia, in particolare, continua e derivabile, tale equivalenza viene detta *equivalenza algebrica* e $\mathbf{T}(t)$ trasformazione di equivalenza algebrica.

Si osservi che alcune delle matrici rimangono invariate in tali equivalenze, in particolare la $\mathbf{D}$ che caratterizza il legame diretto ingresso-uscita e la matrice delle risposte impulsive $\mathbf{W}$ che caratterizza

il regime forzato nello stato zero; ciò è ovvia conseguenza della indipendenza di tali legami dallo stato. In questo contesto è usuale la dizione: *nei sistemi differenziali la matrice delle risposte impulsive è invariante nell'ambito di un equivalenza algebrica.*

È interessante osservare pure che ad un *sistema stazionario* possono anche corrispondere *rappresentazioni non stazionarie*. Infatti, se si parte da una rappresentazione stazionaria e si applicano le trasformazioni (II.60) e (II.61), si ottiene, come è immediato constatare nelle varie relazioni sopra dedotte, una rappresentazione non stazionaria. In tale nuova rappresentazione soltanto il legame diretto e la risposta impulsiva, per quanto visto, mantengono la proprietà di stazionarietà. Nel caso dei sistemi stazionari è tuttavia più interessante considerare solo *rappresentazioni stazionarie* e a tal fine è necessario e sufficiente considerare trasformazioni di coordinate (II.60) e (II.61) con una matrice $\mathbf{T}$ indipendente dal tempo. La deduzione delle relazioni di equivalenza che in questo caso viene detta *equivalenza stretta* è una immediata particolarizzazione del caso già esaminato. Per comodità del lettore le relazioni di equivalenza sono raccolte nella tabella II.2.

TABELLA II.2

Modello esplicito	Modello differenziale
$\hat{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{T}(t)\,\Phi(t,\tau)\,\mathbf{T}^{-1}(\tau)$	$\hat{\mathbf{A}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\,\mathbf{T}^{-1}(t) + \mathbf{T}(t)\,\mathbf{A}(t)\,\mathbf{T}^{-1}(t)$
$\hat{\mathbf{H}}(t,\tau) = \mathbf{T}(t)\,\mathbf{H}(t,\tau)$	$\hat{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{T}(t)\,\mathbf{B}(t)$
$\hat{\Psi}(t,\tau) = \Psi(t,\tau)\,\mathbf{T}^{-1}(\tau)$	$\hat{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{T}^{-1}(t)$
$\hat{\mathbf{W}}(t,\tau) = \mathbf{W}(t,\tau)$	$\hat{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{D}(t)$

*

APPENDICE II

A.II.1 - Equazioni differenziali vettoriali, lineari, del primo ordine[1].

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{1}$$

in cui $t \in R$, $\mathbf{x}(t) \in C^n$, $\mathbf{A}$ è una matrice $n \times n$ e $\mathbf{b}$ è un vettore $n \times 1$ di funzioni continue di t a valori complessi.

In queste ipotesi, dato un qualunque $t_0 \in R$ e un qualunque $\mathbf{c} \in C^n$ esiste ed è unica, su R, la soluzione ξ della (1) che soddisfa alla condizione iniziale:

$$\xi(t_0) = \mathbf{c} \tag{2}$$

Per il calcolo della soluzione della (1) si consideri l'equazione omogenea associata:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) \tag{3}$$

Per le soluzioni di questa equazione vale il seguente:

Teorema I - L'insieme di tutte le soluzioni della (3) su R costituisce uno spazio lineare a dimensione n, sul campo C dei numeri complessi.

(1) - La trattazione qui riportata segue il testo di E.A. Coddington - N.Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw Hill (New York), 1955 - Per le nozioni sugli spazi lineari, cfr. nota a pag.34.

Dimostrazione. Indicate con ξ_1, ξ_2 due generiche soluzioni della (3), c_1, c_2 due numeri complessi, anche $c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$ è soluzione della (3). Di conseguenza l'insieme di tutte queste soluzioni è uno spazio lineare. Per dimostrare che esso ha dimensione n, si considerino n soluzioni $\xi_1, \dots, \xi_n$, soddisfacenti a condizioni iniziali $\xi_1(t_0) = \mathbf{e}_1, \dots, \xi_n(t_0) = \mathbf{e}_n$, dove $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ sono i vettori definiti dalle (II.9) - (II.11).

Tali soluzioni sono tra loro linearmente indipendenti su R; infatti, se non lo fossero, dovrebbe esistere un vettore $\alpha \neq 0$ di numeri complessi tale che:

$$(\xi_1(t) \dots \xi_n(t))\,\alpha = (0 \dots 0) \qquad \forall t \in R; \tag{4}$$

ma questa calcolata per $t = t_0$, comporterebbe la relazione:

$$(\xi_1(t_0) \dots \xi_n(t_0))\,\alpha = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)\,\alpha = (0 \dots 0) \tag{5}$$

che è manifestamente assurda.

Rimane quindi solo da dimostrare che ogni soluzione può essere espressa come combinazione lineare di $\xi_1, \dots, \xi_n$. In proposito, basta considerare che ogni generico valore iniziale $\mathbf{c} \in C^n$ può essere sempre espresso nella forma:

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + \dots + c_n \mathbf{e}_n \tag{6}$$

dove $c_1, \dots, c_n$ sono gli elementi di $\mathbf{c}$. È allora di immediata verifica che la funzione:

$$\xi = c_1 \xi_1 + \dots + c_n \xi_n \tag{7}$$

(soluzione della (3) per la linearità dello spazio delle soluzioni) soddisfa alla condizione iniziale (1). ◁

Grazie a questo risultato, per la completa conoscenza dell'insieme di soluzioni della (3) è sufficiente disporre di un qualsiasi insieme di n soluzioni linearmente indipendenti che costituisce perciò una *base* dello spazio delle soluzioni.

Si definisce come *matrice fondamentale* di soluzioni una qualsiasi matrice $\mathbf{X}$ che abbia come colonne n soluzioni linearmente indipendenti della (3) (cioè gli elementi di una base dello spazio di soluzioni). In funzione di una di tali matrici, per il Teorema I, ogni soluzione della (3) si può sempre scrivere nella forma:

$$\xi = \mathbf{X}\,\mathbf{k} \tag{8}$$

ove $\mathbf{k}$ è un vettore di C^n.

Per le matrici fondamentali vale il:

Teorema II - Ogni matrice fondamentale $\mathbf{X}(t)$ è non singolare per tutti i $t \in R$.

Dimostrazione. È immediato constatare che, per almeno un valore $\bar{t} \in R$, $\mathbf{X}(\bar{t})$ è non singolare e cioè $|\mathbf{X}(\bar{t})| \neq 0$.

Infatti se ξ è una arbitraria soluzione non identicamente nulla della (3), per il Teorema I esiste ed è unico un vettore costante (non nullo) tale che:

$$\xi = \mathbf{X}\, a \tag{9}$$

Per ipotesi, in almeno un valore $\bar{t}$, $\xi(\bar{t}) \neq \mathbf{0}$ e quindi il sistema di equazioni:

$$\xi(\bar{t}) = \mathbf{X}(\bar{t})\, a \tag{10}$$

nell'incognita a, ammettendo soluzione unica, deve avere determinante dei coefficienti $|\mathbf{X}(\bar{t})| \neq 0$.

La prova si completa mostrando che la non singolarità di una matrice fondamentale in un punto $\bar{t} \in R$ implica la non singolarità per ogni $t \in R$. Ciò si può vedere per contraddizione. Se infatti per un valore $\hat{t} \in R$ risulta $|\mathbf{X}(\hat{t})| = 0$, allora esiste un vettore costante (non nullo) tale che:

$$\mathbf{X}(\hat{t})\, \beta = \mathbf{0} \tag{11}$$

D'altra parte, la funzione:

$$\xi = \mathbf{X}\, \beta \tag{12}$$

è, per il Teorema I, l'unica soluzione che soddisfa alla condizione $\xi(\hat{t}) = \mathbf{X}(\hat{t})\, \beta = \mathbf{0}$. Poichè d'altra parte anche la funzione $\mathbf{0}$ (per ogni $t \in R$) soddisfa alla (3) con la stessa condizione iniziale, per l'unicità si può concludere che $\xi(t) = \mathbf{0}$, per ogni $t \in R$. Questo per la (12) implica che $|\mathbf{X}(t)| = 0$ per ogni $t \in R$. ◁

Si osservi che ogni matrice fondamentale gode della proprietà:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{X}(t) \tag{13}$$

in quanto ogni colonna di $\mathbf{X}$ soddisfa alla (3).

Per determinare una matrice fondamentale di soluzioni si è condotti quindi a considerare (in luogo della equazione vettoriale (3)) la equazione omogenea associata *matriciale*:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{S}(t) \tag{14}$$

con $\mathbf{S}$ matrice $n \times n$ di funzioni di t, tra le cui soluzioni, grazie alla (12), sono comprese le matrici fondamentali. Per individuare queste ultime ci si può avvalere del seguente:

Teorema III - Una soluzione Σ della (14) è una matrice fondamentale se e solo se, scelto arbitrariamente un punto $t \in R$, $|\Sigma(t)| \neq 0$.

Dimostrazione. Se Σ è una matrice fondamentale, per il Teorema II, $|\Sigma(t)| \neq 0$ per ogni $t \in R$. Viceversa, se $|\Sigma(\bar{t})| \neq 0$ per almeno un punto $\bar{t} \in R$, non può esistere un vettore costante α (non nullo) tale da annullare $\mathbf{X}(\bar{t})\, \alpha$ e quindi, a fortiori non esiste alcun vettore costante β tale da annullare, per ogni $t \in R$, la combinazione $\mathbf{X}(t)\beta$; di conseguenza le colonne di $\mathbf{X}$ sono soluzioni linearmente indipendenti su R o, il che è lo stesso, $\mathbf{X}$ è una matrice fondamentale. ◁

Partendo dalla (8) si può esplicitare la soluzione della equazione omogenea associata (3) che soddisfi alla condizione (2). Imponendo tale condizione si ha:

$$\xi(t_0) = \mathbf{X}(t_0)\, \mathbf{k} = \mathbf{c} \tag{15}$$

e, grazie alla non singolarità di $\mathbf{X}(t_0)$, si ha:

$$\mathbf{k} = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\, \mathbf{c} \tag{16}$$

e, in definitiva:

$$\xi(t) = \mathbf{X}(t)\, \mathbf{X}^{-1}(t_0)\, \mathbf{c} \qquad \forall\, t \in R \tag{17}$$

La soluzione della equazione non omogenea, che può essere ottenuta con il metodo della variazione delle costanti, assume la forma:

$$\xi(t) = \mathbf{X}(t)\, \mathbf{X}^{-1}(t_0)\, \mathbf{c} + \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(\tau)\, \mathbf{b}(\tau)\, d\tau \tag{18}$$

Indipendentemente dal modo in cui è ottenuta, la prova che la (18) è la soluzione unica della (1) può essere effettuata per verifica.

Per utilizzare la (18) è necessario disporre di una matrice fondamentale di soluzioni e cioè, per il Teorema III, di una soluzione della (14) non singolare in almeno un punto di R. Una matrice che soddisfa a queste condizioni è la seguente:

$$\mathbf{X}(t) = \left\{ \mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\, d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1) \left[\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\, d\tau_2 \right] d\tau_1 + \ldots \right\} \mathbf{C} \tag{19}$$

ove $\mathbf{C}$ è una matrice $n \times n$ non singolare con elementi in C.

Si può dimostrare che lo sviluppo (19) converge assolutamente per ogni t finito ed uniformemente su ogni intervallo chiuso di R. Si constata inoltre che $\mathbf{C} = \mathbf{X}(t_0)$ e quindi:

$$\mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^{-1}(t_0) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau_1)\left[\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2)\,d\tau_2\right] d\tau_1 + \dots \tag{20}$$

A conclusione di questa Appendice si ritiene utile rilevare i rapporti tra la (18) e la (II.24). Se $\xi(t)$ si considera come valore dello stato all'istante t, $\mathbf{c}$ come suo valore all'istante t_0 e se si tiene presente che, per la rappresentazione di un sistema differenziale lineare, nella (1) il termine $\mathbf{b}(t)$ viene particolarizzato nella forma:

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t) \tag{21}$$

si può immediatamente dedurre che:

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^{-1}(\tau) \tag{22}$$

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^{-1}(\tau)\,\mathbf{B}(\tau) \tag{23}$$

Queste formule sono di notevole interesse e stabiliscono il collegamento tra la teoria delle equazioni differenziali lineari e la teoria dei sistemi differenziali lineari. In particolare, la (22) consente di utilizzare la (20) per il calcolo della $\Phi(t, \tau)$.

Deliberatamente, nelle (22) ed (23) non si sono precisati gli insiemi dei valori degli argomenti per cui le relazioni sono valide, in quanto le funzioni a secondo membro sono definite su $R \times R$ mentre quelle a primo membro su $(R \times R)^*$; a rigore quindi tali relazioni sono valide su $(R \times R)^*$. In effetti però le (22) ed (23) possono essere utilizzate per definire una *estensione* di $\Phi(t, \tau)$ ed $\mathbf{H}(t, \tau)$ a valori di t inferiori a τ. In proposito conviene fare alcune osservazioni.

Per il loro significato, la matrice di transizione $\Phi(t, \tau)$ e la matrice delle risposte impulsive nello stato $\mathbf{H}(t, \tau)$, rappresentano, nei *sistemi causali*, l'effetto ad un istante t conseguente ad una causa applicata ad un istante *anteriore* τ (lo stato assunto nell'evoluzione libera a partire da uno stato iniziale, lo stato assunto come conseguenza di una sollecitazione impulsiva). Quando si considerano però i modelli differenziali, e cioè le equazioni del tipo (1), le soluzioni sono definite per ogni valore di t. Di conseguenza la (18) consente il calcolo della soluzione per valori di $t < t_0$ e cioè essa può essere utilizzata per *risalire all'indietro* (nel tempo) nella determinazione dello stato. Questa proprietà non

è una caratteristica generale dei sistemi, ma piuttosto è tipica dei sistemi differenziali di ordine finito; ad esempio essa non si verifica nei sistemi a tempo discreto.

Queste considerazioni consentono, come si è detto, di definire delle funzioni Φ ed $\mathbf{H}$ estese secondo le (22) ed (23). Questo porta, in particolare per la funzione Φ, a proprietà più forti di quelle esaminate nel paragrafo 4. La $\Phi(t, \tau)$ oltre a godere della proprietà di semigruppo (II.28), come peraltro si può dedurre direttamente della (22), ammette, per ogni coppia $(t, \tau) \in (R \times R)$, l'inversa, che è data da:

$$\Phi^{-1}(t, \tau) = \mathbf{X}(\tau)\,\mathbf{X}^{-1}(t) \tag{24}$$

Di conseguenza l'insieme delle matrici di transizione estese secondo le (22) costituisce un *gruppo* rispetto all'operazione di prodotto tra matrici e non soltanto un semigruppo.

Si osservi infine che la (24) consente anche di scrivere la relazione:

$$\Phi(\tau, t) = \Phi^{-1}(t, \tau) \tag{25}$$

*