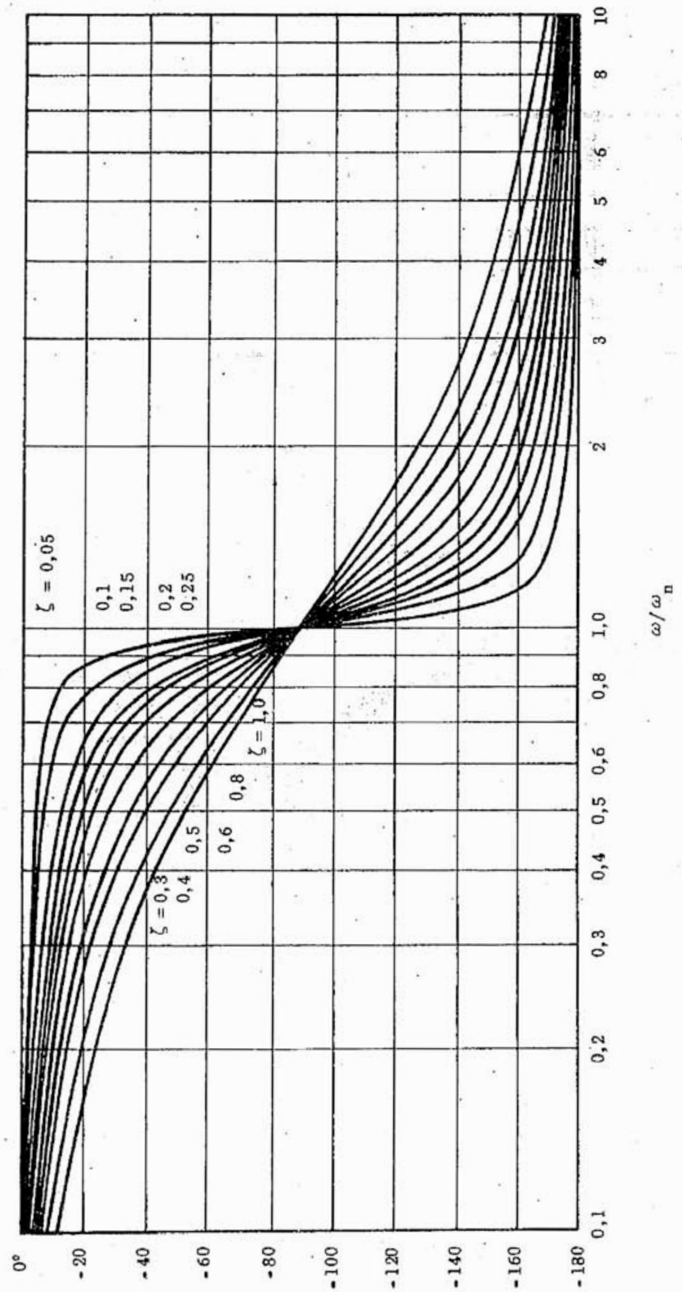

Fig.6

CAPITOLO IV

ELEMENTI DI TEORIA DELLA STRUTTURA E DI TEORIA DELLA REALIZZAZIONE

IV.1 - Condizioni per l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali.

Nello sviluppare lo studio dei modi naturali (cfr. Capitolo III) si è richiamata l'attenzione sul fatto che un impulso in ingresso non sempre è in grado di *eccitare* tutti i modi naturali e che non tutti i modi eccitati possono *essere osservati* attraverso l'uscita. Partendo da questa considerazione si è posto in evidenza, nel par.III.9, che in generale la matrice delle risposte impulsive non costituisce, da sola, un modello completo del sistema. Si è anticipato, tuttavia, che quando gli impulsi eccitano tutti i modi naturali e questi possono essere tutti osservati attraverso l'uscita, la matrice delle risposte impulsive (e quindi anche la matrice di trasferimento, che ne è la trasformata di Laplace) individua in modo completo il sistema. In questo Capitolo si intende fornire una giustificazione di quanto asserito, nel quadro di alcuni risultati generali della Teoria dei Sistemi.

Un primo passo consisterà nello stabilire condizioni necessarie e sufficienti affinchè *tutti* i modi naturali della risposta nello stato possano essere:

a) eccitati da impulsi in ingresso;

b) osservati attraverso l'uscita.

Tali condizioni saranno riferite alle matrici che caratterizzano un'assegnata rappresentazione del sistema in esame. Come è naturale attendersi, tali condizioni risulteranno invarianti sull'insieme di tutte le rappresentazioni che si possono associare ad un medesimo sistema mediante trasformazioni di coordinate nello spazio di stato. Esse pertanto potranno essere intese come condizioni relative al sistema anzichè ad una sua particolare rappresentazione (allo stesso modo in cui si parla di modi naturali del sistema e non di una sua rappresentazione).

Si consideri dunque una rappresentazione in forma differenziale di un sistema lineare, stazionario e strettamente proprio[1]:

$D = 0$

$$\text{(IV.1)} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$

$$\text{(IV.2)} \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)$$

con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Ad essa corrisponde, come è noto, la rappresentazione in forma esplicita:

$$\text{(IV.3)} \qquad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\text{(IV.4)} \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

È chiaro che la condizione di cui al punto a) riguarda solo il legame ingresso-stato e quindi coinvolge solo la coppia di matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Più precisamente si può dimostrare che *i modi naturali della risposta nello stato possono essere tutti eccitati da impulsi in ingresso se e solo se le n righe della matrice $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ sono funzioni linearmente indipendenti su un prefissato intervallo $[0, T]$, peraltro arbitrario.*

Per provare questo risultato ci si riferirà, come del resto si è fatto nell'analisi dei modi naturali, al caso in cui gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono distinti. È stato osservato nel par. III.5 che la risposta forzata nello stato ad ingressi impulsivi del tipo (III.70) assume la forma:

$$\text{(IV.5)} \qquad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{b}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

essendo $\mathbf{b}_i$ l'i-esima colonna della matrice $\mathbf{B}$. Servendosi della rappresentazione spettrale della funzione $e^{\mathbf{A}t}$ data dalla (III.21) si ha:

(1) - Ai fini dell'analisi che viene sviluppata in questo Capitolo, non riveste particolare interesse, né ulteriori difficoltà, la considerazione di sistemi propri anzichè strettamente propri. Per rendersi conto di ciò basterà tener presente (cfr. fig. II.4) che un sistema proprio appare come l'interconnessione, in parallelo, di un sistema strettamente proprio e di uno senza memoria.

$$\text{(IV.6)} \qquad \mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t}\,\mathbf{u}_j\,\mathbf{v}'_j\,\mathbf{b}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

che esplicita la decomposizione della risposta in modi naturali. Per ogni fissato i la corrispondente risposta nello stato contiene il modo relativo all'autovalore λ_j se e solo se:

$$\text{(IV.7)} \qquad \mathbf{v}'_j\,\mathbf{b}_i \neq 0$$

Di conseguenza, considerando le p risposte (IV.6) relative ai p impulsi in ingresso, si può dire che almeno una di esse contiene il modo relativo all'autovalore λ_j se e solo se la riga j-esima della matrice:

$$\text{(IV.8)} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \mathbf{B}$$

è diversa da zero. In definitiva si ha che le p risposte contengono tutti i modi se e solo se nessuna riga della (IV.8) è nulla[1]. D'altra parte, similmente alla relazione (16) dell'Appendice A.III.1, si può anche scrivere:

$$\text{(IV.9)} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}'_1\mathbf{B} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{\lambda_n t}\mathbf{v}'_n\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

(per dedurre la (IV.9) è sufficiente tenere presente la (III.21) e le (12) e (14) di A.III.1). Poichè, per ipotesi, gli n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono

(1) - Per rendere la presente prova più compatta, nella (IV.6) e nelle relazioni seguenti non si distinguono i modi aperiodici da quelli pseudoperiodici. Si tenga, in proposito, presente che, se $\mathbf{v}_j$ e $\mathbf{v}_j^*$ sono gli autovettori sinistri associati agli autovalori λ_j e λ_j^* e se la matrice $\mathbf{B}$ è ad elementi reali, l'annullarsi del vettore (riga) $\mathbf{v}'_j\mathbf{B}$ implica l'annullarsi del vettore $\mathbf{v}_j^{*\prime}\mathbf{B}$ e viceversa. In altri termini le due righe della formula (IV.8) corrispondenti al modo pseudoperiodico associato alla coppia di autovalori coniugati λ_j e λ_j^* sono o entrambe nulle o entrambe diverse da zero. Una simile considerazione si potrà applicare alla (IV.17).

distinti, le n righe della matrice a terzo membro della (IV.9) sono indipendenti se e solo se nessuna riga della matrice (IV.8) si annulla. Questa proprietà di indipendenza lineare implica ed è implicata da quella delle righe di $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ in quanto il primo membro della (IV.9) differisce da essa per una matrice non singolare.

La condizione di eccitabilità dei modi, ora dimostrata, richiede la conoscenza della funzione $e^{\mathbf{A}t}$. Poichè, frequentemente, la rappresentazione del sistema è disponibile in forma differenziale, è interessante esaminare se è possibile stabilire una condizione di più agevole verifica a partire dalla coppia di matrici **A** e **B**. In proposito ci si può avvalere del seguente risultato:

Lemma IV.1. Data una coppia di matrici **A** e **B**, rispettivamente $n \times n$ ed $n \times p$, le n righe della funzione $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ sono linearmente indipendenti su un prefissato (e arbitrario) intervallo $[0, T]$ se e solo se:

(IV.10) $$\boxed{\text{rango } [\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n}$$

Dimostrazione. Se le righe di $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ sono linearmente dipendenti, esiste un vettore α ad n componenti tale che:

(IV.11) $$\alpha' e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = 0 \qquad \forall t \in [0, T]$$

Da questa e dalle sue derivate successive (sino all'ordine n - 1), calcolate per $t = 0$, si deduce:

(IV.12) $$\alpha' [\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = 0$$

e cioè la negazione della (IV.10).

Se, viceversa, il rango della matrice $[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ è inferiore ad n, esiste un vettore α che soddisfa la (IV.12), e quindi, separatamente, le relazioni:

(IV.13) $$\alpha' \mathbf{A}^i \mathbf{B} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n-1)$$

Tenendo presente che la matrice **A**, per il Teorema di Cayley Hamilton, soddisfa la propria equazione caratteristica ($\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$), si ha:

(IV.14) $$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = 0$$

Quindi la n relazioni (IV.13) implicano:

(IV.13') $$\alpha' \mathbf{A}^i \mathbf{B} = 0 \qquad \forall i$$

Ricordando ora la formula (III.5), si ha infine:

(IV.15) $$\alpha' \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{B} = \alpha' e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = 0 \qquad \forall t \in R$$

e cioè si deduce che le n righe di $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ sono linearmente dipendenti. ◁

Passando ora a esaminare il problema dell'osservabilità dei modi naturali attraverso l'uscita, ci si rende immediatamente conto che tale proprietà, interessando il comportamento del sistema in evoluzione libera [$\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ nelle (IV.1)-(IV.2) o (IV.3)-(IV.4)] è legata solo alla coppia di matrici **A** e **C**. Relativamente ad esse si può stabilire un risultato sostanzialmente analogo a quello stabilito per l'eccitabilità. Precisamente si può dimostrare che *i modi naturali possono essere tutti osservati attraverso l'uscita se e solo se le n colonne della matrice* $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$ *sono funzioni linearmente indipendenti su un prefissato intervallo* $[0, T]$, *peraltro arbitrario.*

La prova di questo risultato, si può condurre in modo analogo a quello seguito per l'eccitabilità, partendo dalle osservazioni fatte nel par.III.5. In questo si è stabilito che il modo associato all'autovalore λ_j può essere osservato attraverso l'uscita se e solo se il vettore:

(IV.16) $$\boxed{\mathbf{C}\,\mathbf{u}_j \neq \mathbf{0}}$$

Di conseguenza i modi naturali possono essere tutti osservati se e solo se nessuna colonna della matrice:

(IV.17) $$\mathbf{C}\,(\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n)$$

è nulla. Da questa condizione, che è analoga a quella stabilita per la (IV.8), è possibile dedurre il risultato relativo all'indipendenza lineare delle colonne di $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$.

Anche questa volta si può trasformare questa condizione in una sul rango di una opportuna matrice costruita a partire da **A** e **C**.

Più precisamente, si ha[1].

Lemma IV.2. Data una coppia di matrici **A** e **C**, rispettivamente $n \times n$ e $q \times n$, le n colonne della funzione $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$ sono linearmente indi-

(1) - In effetti questo lemma può essere dedotto, in base a opportune relazioni di *dualità*, dal precedente.

pendenti su un prefissato (e arbitrario) intervallo $[0, T]$ se e solo se:

$$\text{(IV.18)} \qquad \text{rango} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

A conclusione di questo paragrafo si vuole mostrare che, come preannunciato, le condizioni trovate sono invarianti sull'insieme di tutte le rappresentazioni stazionarie di uno stesso sistema. Infatti un cambiamento di coordinate nello spazio di stato trasforma le matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nelle $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T A T}^{-1}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C T}^{-1}$ (cfr. Tabella II particolarizzata per il caso stazionario). Grazie a queste relazioni la condizione di rango (IV.10) rimane invariata. Infatti:

$$\text{(IV.10')} \qquad n = \text{rango}\ [\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \text{rango}\ \mathbf{T}^{-1}[\hat{\mathbf{B}}\ \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \ldots \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}}] =$$
$$= \text{rango}\ [\hat{\mathbf{B}}\ \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \ldots \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}}]$$

ove l'ultimo passaggio è giustificato dalla non singolarità di $\mathbf{T}$. Analoga situazione si ha per la (IV.18).

IV.2 - Decomposizione del sistema in base alle proprietà dei modi naturali.

Si consideri un sistema di ordine n con autovalori distinti. Ciascuno degli n modi naturali della risposta nello stato può essere classificato a seconda della possibilità, o meno, di venire eccitato mediante impulsi in ingresso e/o osservato attraverso l'uscita. Vengono in tal modo ad essere individuati quattro insiemi di modi, che, convenzionalmente, si indicheranno come:

- l'insieme «a» dei modi eccitabili e non osservabili;
- l'insieme «b» dei modi eccitabili ed osservabili;
- l'insieme «c» dei modi non eccitabili e non osservabili;
- l'insieme «d» dei modi non eccitabili ed osservabili.

Si indicheranno poi, rispettivamente con n_a, n_b, n_c, n_d, i numeri di modi appartenenti a questi quattro insiemi; tra essi ovviamente sussiste la relazione:

$$\text{(IV.19)} \qquad n_a + n_b + n_c + n_d = n$$

Il criterio per stabilire se il modo naturale associato al generico autovalore λ_j appartiene a l'uno o a l'altro dei quattro sottoinsiemi ora definiti, è contenuto implicitamente nelle prove date nel paragrafo precedente. Si tratta, in altri termini, di verificare l'annullarsi o meno della riga j-esima nella matrice (IV.8) e/o della colonna j-esima nella matrice (IV.17). Se si riordinano righe e colonne di tali matrici in modo che gli autovalori siano proprio nella sequenza corrispondente ai quattro sottoinsiemi sopra definiti, esse assumono la forma:

$$\text{(IV.20)} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(IV.21)} \qquad \mathbf{C}(\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n) = (0 \ \ \mathbf{C}_b \ \ 0 \ \ \mathbf{C}_d)$$

e le quattro sottomatrici che compaiono nei secondi membri hanno rispettivamente, n_a, n_b, n_c, n_d righe [per la (IV.20)] e colonne [per la formula (IV.21)].

Le matrici a primo membro nelle (IV.20) e (IV.21) costituiscono in effetti, assieme alla:

$$\text{(IV.22)} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(con autovalori riordinati in accordo a quanto fatto per le altre matrici) una particolare rappresentazione del sistema in esame, precisamente quella che si ottiene con la trasformazione di coordinate nello spazio di stato definita da:

$$
\text{(IV.23)} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \mathbf{x}
$$

Infatti, applicando quest'ultima alle equazioni (IV.1) e (IV.2) e tenendo presente la (III.15) si ha:

$$
\text{(IV.24)} \qquad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \mathbf{A}\,(\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n)\,\mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)
$$

$$
\text{(IV.25)} \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,(\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n)\,\mathbf{z}(t)
$$

Ricordando la (16) della Appendice A.III.1 e tenendo conto delle (IV.20) - (IV.21) si ha:

$$
\text{(IV.26)} \qquad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)
$$

$$
\text{(IV.27)} \qquad \mathbf{y}(t) = (\mathbf{0} \;\; \mathbf{C}_b \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{C}_d)\,\mathbf{z}(t)
$$

Partizionando il vettore $\mathbf{z}$ in quattro vettori a n_a, n_b, n_c, n_d componenti, le (IV.26) - (IV.27) possono essere riscritte nella forma:

$$
\text{(IV.28)} \qquad
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}_a(t) &= \Lambda_a\,\mathbf{z}_a(t) + \mathbf{B}_a\,\mathbf{u}(t) \\
\dot{\mathbf{z}}_b(t) &= \Lambda_b\,\mathbf{z}_b(t) + \mathbf{B}_b\,\mathbf{u}(t) \\
\dot{\mathbf{z}}_c(t) &= \Lambda_c\,\mathbf{z}_c(t) \\
\dot{\mathbf{z}}_d(t) &= \Lambda_d\,\mathbf{z}_d(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_b\,\mathbf{z}_b(t) + \mathbf{C}_d\,\mathbf{z}_d(t)
\end{aligned}
$$

(con ovvio significato dei simboli Λ_a, Λ_b, Λ_c, Λ_d).

Il sistema, dunque, appare *decomposto in quattro sottosistemi*, come in fig.IV.1, dei quali solo uno (il sistema $\mathcal{S}_b$) ha tutti i modi naturali eccitabili da impulsi in ingresso ed osservabili sull'uscita.

È intuitivo, dallo schema di fig.IV.1, che la matrice delle risposte impulsive, caratterizzante il legame forzato ingresso-uscita, dipende solo dal sottosistema $\mathcal{S}_b$. Ciò può essere peraltro verificato calcolando l'espressione (III.14) della risposta impulsiva, con riferimento alla rappresentazione (IV.26) - (IV.27)[1] e ottenendo:

$$
\text{(IV.29)} \qquad \mathbf{W}(t) = \mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}_b\,e^{\Lambda_b t}\,\mathbf{B}_b
$$

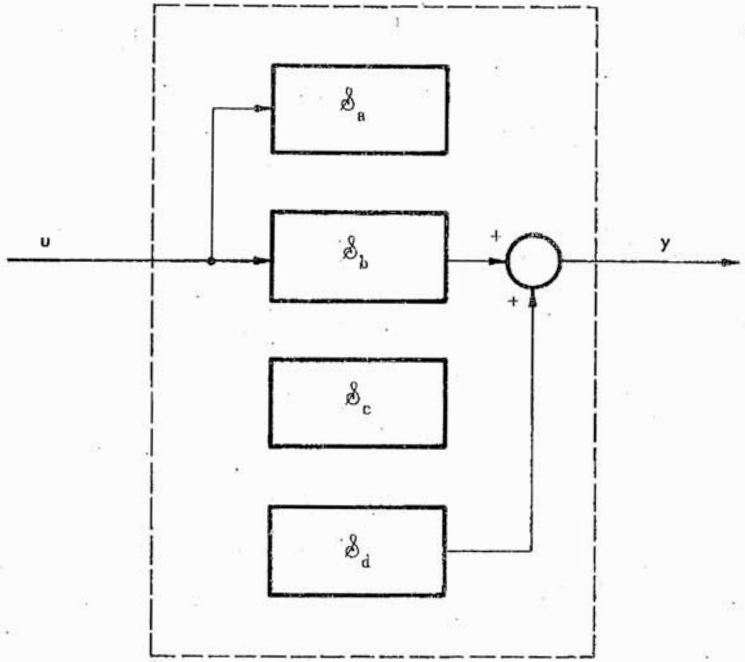

Fig.IV.1

A questo punto è chiaro che, se si assume come modello del sistema la matrice delle risposte impulsive, da essa non si possono otte-

(1) - Si ricordi, cfr. pag.57, che la matrice delle risposte impulsive è invariante rispetto a trasformazioni di coordinate nello spazio di stato.

nere informazioni sui sottosistemi $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_d$ eventualmente presenti. *Rimane aperto il problema di vedere se da essa si può ottenere la ricostruzione di tutto il sottosistema* $\mathcal{S}_b$ (e quindi, nel caso che esso solo sia presente, di tutto il sistema). Prima di affrontare questo problema si ritiene interessante approfondire l'analisi fin qui sviluppata da un altro punto di vista, che ha il vantaggio di prestarsi facilmente alla generalizzazione dei risultati (trattazione unitaria per il caso di autovalori distinti e non, estensione ai sistemi lineari non stazionari, ecc.).

IV.3 - Raggiungibilità e osservabilità.

Nei paragrafi precedenti si è caratterizzata *la proprietà di interazione tra ingresso e stato* riferendosi alla possibilità o meno di eccitare, con impulsi, i vari modi naturali del sistema. Per caratterizzare tale interazione ci si può anche riferire però alla possibilità di raggiungere o meno per mezzo dell'ingresso (non necessariamente impulsivo) i vari punti dello spazio di stato a partire da uno stato prefissato. Similmente, per quanto riguarda *l'interazione tra stato e uscita*, invece di riferirsi alla possibilità di osservare i vari modi naturali, ci si può basare sulla possibilità o meno di ricostruire il valore di un generico stato iniziale a partire dall'osservazione delle grandezze di ingresso e di uscita. A questi diversi punti di vista è appunto dedicato il presente paragrafo.

Per l'interazione ingresso-stato si introduce la seguente proprietà:

Definizione IV.1. Uno *stato* $\tilde{\mathbf{x}}$ del sistema rappresentato dalle (IV.1) - (IV.2) si dice *raggiungibile* se esistono un istante di tempo finito T ed una legge di controllo $\mathbf{u}|_{[0,T]}$ che trasferisce lo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ nello stato $\tilde{\mathbf{x}}$ all'istante T e cioè se:

$$\int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \tilde{\mathbf{x}} \tag{IV.30}$$

Il *sistema* si dice *raggiungibile* se tutti i punti dello spazio di stato sono raggiungibili[1].

(1) - Molto spesso, accanto alla proprietà di raggiungibilità, si introduce anche la proprietà di *controllabilità*, con la seguente definizione: uno stato $\mathbf{x}$ si dice controllabile se esistono un istante di tempo finito T ed una legge di controllo $\mathbf{u}|_{[0,T]}$ che

(Segue)

È interessante esaminare quali sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un assegnato sistema sia raggiungibile. Si può dimostrare che le condizioni cercate coincidono con quelle, stabilite nel paragrafo IV.1, relativamente alla eccitabilità di tutti i modi. Rendendo esplicito, per completezza, questo risultato, si può affermare che *il sistema rappresentato dalle (IV.1)-(IV.2) è raggiungibile se e solo se*:

a) *le righe di* $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ *sono funzioni linearmente indipendenti su un prefissato (arbitrario) intervallo* $[0, T]$, *ovvero;*

b) *la matrice* $[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \dots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ *ha rango* n.

Poichè l'equivalenza di a) e b) scaturisce dal Lemma IV.1, è sufficiente dimostrare la condizione a). A tale scopo, si supponga a) verificata. Allora, comunque si scelga $T > 0$, la matrice:

$$\mathcal{C} = \int_0^T e^{-\mathbf{A}t}\,\mathbf{B}\,\mathbf{B}'\,e^{-\mathbf{A}'t}\,dt \tag{IV.31}$$

è non singolare[1]. Si consideri un arbitrario stato $\mathbf{x}$ e si definisca la legge di controllo:

trasferisce lo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$ nell'origine $\mathbf{0}$ dello spazio di stato all'istante T.

In effetti, nel caso dei sistemi lineari stazionari e a tempo-continuo, si può dimostrare che le due proprietà sono equivalenti, nel senso che uno stato è controllabile se e solo se è raggiungibile. Tuttavia, già nel caso dei sistemi lineari stazionari e a tempo-discreto ciò non si verifica. Si è preferito qui riferirsi alla raggiungibilità perchè è questa la proprietà che, sia nei sistemi a tempo continuo sia in quelli a tempo-discreto, è connessa al concetto di minimalità delle realizzazioni (cfr. par.IV.5).

(1) - Se $\mathcal{C}$ è singolare, esiste un vettore $\gamma \neq 0$ tale che:

$$\mathcal{C}\,\gamma = \mathbf{0}$$

Premoltiplicando questa per γ' si ottiene allora

$$0 = \gamma'\,\mathcal{C}\,\gamma = \gamma' \int_0^T e^{-\mathbf{A}t}\,\mathbf{B}\mathbf{B}'e^{-\mathbf{A}'t}\,dt\,\gamma = \int_0^T (\gamma' e^{-\mathbf{A}t}\,\mathbf{B})\,(\gamma' e^{-\mathbf{A}t}\,\mathbf{B})'\,dt$$

Poichè l'integrando dell'ultimo membro è una funzione a valori non negativi, da questa risulta:

$$\gamma' e^{-\mathbf{A}t}\,\mathbf{B} \equiv 0 \qquad \forall\, t \in [0, T]$$

che contraddice l'indipendenza lineare delle righe di $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}$, e quindi di $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$, su $[0, T]$.

(IV.32) $$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{B}' e^{-\mathbf{A}'t} \mathcal{C}^{-1} e^{-\mathbf{A}T} \hat{\mathbf{x}}$$

Il valore assunto dallo stato del sistema all'istante T risulta:

(IV.33) $$\mathbf{x}(t) = \int_0^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(\tau) \, d\tau = \hat{\mathbf{x}}$$

e cioè soddisfa la (IV.30). Risulta così provata la sufficienza, data l'arbitrarietà di $\hat{\mathbf{x}}$ (si noti anche che è stata fornita una espressione esplicita della legge di controllo che consente di raggiungere lo stato $\hat{\mathbf{x}}$).

Si supponga ora che a) non sia verificata e cioè che esista un vettore α tale che:

(IV.34) $$\alpha' e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} = \mathbf{0} \qquad \forall t \in R$$

È facile verificare che lo stato α non è raggiungibile. Se infatti lo fosse, esisterebbe una legge di controllo $\mathbf{u}|_{[0,T]}$ tale che:

(IV.35) $$\alpha = \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) \, d\tau$$

Moltiplicando a sinistra ambo i membri per α' si avrebbe, per la (IV.34):

(IV.36) $$\alpha' \alpha = \int_0^T \alpha' e^{\mathbf{A}(T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) \, d\tau = 0$$

in contraddizione col fatto che $\alpha \neq \mathbf{0}$ implica $\alpha' \alpha > 0$. Ciò conclude la prova.

Per quanto riguarda l'interazione stato-uscita, si introduce la seguente proprietà:

Definizione IV.2. Uno *stato* $\hat{\mathbf{x}}$ del sistema rappresentato dalle (IV.1) (IV.2) si dice *inosservabile* se la risposta in uscita in evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}$ è nulla per tutti gli istanti $t \geq 0$ e cioè se:

(IV.37) $$\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \qquad \forall t \geq 0$$

Il *sistema* si dice *osservabile* se solo lo stato $\mathbf{0}$ è inosservabile. ◁

A commento di questa definizione è bene rilevare che *gli stati inosservabili coincidono con gli stati equivalenti* (secondo la Definizione I.4 di pag.21) *allo stato* $\mathbf{0}$. La (I.34) infatti, nel caso dei sistemi lineari e stazionari, con $\mathbf{x}_a = \hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{x}_b = \mathbf{0}$ diviene:

(IV.38) $$\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \hat{\mathbf{x}} + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) \, d\tau = \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) \, d\tau$$

e cioè la (IV.37). Da ciò consegue, per la definizione IV.2, che in un sistema osservabile non vi sono stati equivalenti a zero. Ciò a sua volta implica che in un sistema osservabile non vi sono comunque coppie di stati equivalenti (cioè lo spazio di stato è ridotto, nel senso della Definizione I.5); se infatti esistessero due stati equivalenti $\mathbf{x}_a$ e $\mathbf{x}_b$ si avrebbe, ancora dalla (I.34):

(IV.39) $$\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_a = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_b$$

e cioè l'equivalenza a $\mathbf{0}$ di $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$. Questo, per la definizione di sistema inosservabile, implica $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$.

Tutti gli stati, dunque, *di un sistema osservabile sono distinguibili* e cioè possono essere riconosciuti attraverso osservazioni delle grandezze di ingresso e di uscita.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un assegnato sistema sia osservabile coincide con quella di osservabilità di tutti i modi naturali attraverso l'uscita ed *è espressa da*:

a) *le* n *colonne di* $\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t}$ *sono funzioni linearmente indipendenti su un prefissato (arbitrario) intervallo* $[0, T]$, *ovvero*

c) *la matrice* $[\mathbf{C}' \; \mathbf{A}'\mathbf{C}' \ldots (\mathbf{A}')^{n-1} \mathbf{C}']$ *ha rango* n.

Anche questa volta è sufficiete provare la a), grazie al Lemma IV.2. Se le colonne di $\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t}$ sono linearmente indipendenti la (IV.37) è soddisfatta solo da $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ e cioè il sistema è osservabile. Viceversa, se questo è osservabile, non esiste nessun $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ che soddisfa la formula (IV.37) e cioè le colonne di $\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t}$ sono linearmente indipendenti.

Per completare l'analisi della proprietà di osservabilità si mostrerà come sia possibile, in un sistema osservabile, ricostruire lo stato iniziale a partire dalla conoscenza di una coppia di funzioni di ingresso e di uscita su un intervallo arbitrario $[0, T]$. Partendo dall'espressione della risposta:

(IV.40) $$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) \, d\tau \qquad t \in [0, T]$$

si ottiene:

$$\text{(IV.41)} \quad \int_0^T e^{\mathbf{A}'t}\,\mathbf{C}'\mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}t}\,dt\;\mathbf{x}_0 =$$

$$\int_0^T e^{\mathbf{A}'t}\,\mathbf{C}'\left[\mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right]dt$$

Il fattore che moltiplica a sinistra $\mathbf{x}_0$ è non singolare per l'indipendenza lineare delle colonne di $\mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}t}$ (cfr. nota di pag.133). Si può dunque scrivere in definitiva:

$$\text{(IV.42)} \quad \mathbf{x}_0 = \left[\int_0^T e^{\mathbf{A}'t}\,\mathbf{C}'\mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}t}\,dt\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^T e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{C}'\left[\mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right]dt$$

che consente la determinazione di $\mathbf{x}_0$.

A conclusione di questo paragrafo, si vuole fare rilevare che la corrispondenza tra eccitabilità dei modi e raggiungibilità degli stati, da un lato, e tra osservabilità dei modi e osservabilità degli stati, dall'altro, non è limitata al caso in cui tutto lo spazio di stato è raggiungibile e osservabile. In effetti si può sviluppare una teoria ispirata ad esigenze analoghe a quelle che portano alla decomposizione del sistema illustrata nel par.IV.2. In tale teoria, la cui presentazione è fuori dai limiti delle presenti dispense si dimostra che:

- l'insieme degli stati raggiungibili e quello degli stati inosservabili sono sottopazi lineari dello spazio di stato;

- a partire da tali sottospazi è possibile definire una «decomposizione» dello spazio di stato in quattro opportuni sottospazi lineari, i cui elementi sono rispettivamente:

a) raggiungibili e inosservabili,

b) raggiungibili e osservabili,

c) irraggiungibili e inosservabili,

d) irraggiungibili e osservabili;

- con riferimento a questa decomposizione, il sistema appare come l'interconnessione di quattro sottosistemi, ciascuno dei quali con uno spazio di stato caratterizzato dalle suddette proprietà a), b), c), d).

È evidente la connessione che esiste tra questi risultati e quelli visti nel paragrafo IV.2. Anche in questo contesto si riesce a mostrare che la matrice delle risposte impulsive dipende solo dal sottosistema $\mathcal{S}_b$ e cioè dal sottosistema il cui spazio di stato è tutto raggiungibile e osservabile.

IV.4 - Esempi.

L'utilità delle condizioni (IV.10) e (IV.18) stabilite nel paragrafo IV.1 risiede, tra l'altro, nella possibilità di stabilire se tutti i modi della risposta nello stato di un assegnato sistema dinamico possono essere eccitati con impulsi in ingresso e/o osservati attraverso l'uscita, *senza* che sia necessario il calcolo esplicito di autovalori ed autovettori (cioè, in definitiva, dei modi stessi). Si richiama l'attenzione del lettore sul fatto che il problema che si sta considerando è di tipo *qualitativo*, nel senso che riguarda la determinazione di una caratteristica globale dei modi (eccitabilità e/o osservabilità) piuttosto che dei modi stessi. Si vedano in proposito le considerazioni generali svolte alla fine del paragrafo I.9 sulla cosiddetta teoria qualitativa.

Per illustrare questo punto si consideri uno degli esempi per i quali, nel Capitolo III, è stato sviluppato il calcolo dei modi: il motore di fig.III.5. Assumendo come uscita la velocità dell'asse motore, la rappresentazione ingresso-stato uscita è individuata dalle matrici:

$$\text{(IV.43)} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{J} & \frac{KI}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Per la eccitabilità dei modi si tratta di considerare la matrice (IV.10):

$$(\text{IV}.44) \qquad (\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{KI}{JL} \\ 0 & \frac{KI}{JL} & -\frac{KI}{J^2L}(F+R) \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & \frac{R^2}{L^3} \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Pertanto si può affermare che il sistema ha tutti i modi naturali eccitabili. Per l'osservabilità si consideri la matrice (IV.18):

$$(\text{IV}.45) \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{J} & \frac{KI}{J} \\ 0 & \frac{F^2}{J^2} & \frac{KI}{J}\left(\frac{F}{J} - \frac{R}{L}\right) \end{pmatrix}$$

Questa ha rango < 3 e quindi non tutti i modi sono osservabili.

Si vogliono ora commentare con un esempio le implicazioni dei risultati, stabiliti nel paragrafo IV.3, sull'equivalenza tra eccitabilità dei modi e raggiungibilità degli stati e tra osservabilità dei modi e osservabilità degli stati.

Si consideri il circuito di fig.III.9, assumendo come uscita la corrente dell'induttanza; il modello ingresso-stato-uscita è allora descritto dalle matrici:

$$(\text{IV}.46) \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

È già stato osservato (cfr. paragrafo III.5) che il modo aperiodico relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1/RC$ non può essere eccitato da impulsi in ingresso. In questo caso, dunque, non tutti i punti dello spazio di stato sono raggiungibili a partire dallo stato zero. Per riconoscere quali punti dello spazio di stato non sono raggiungibili occorrerebbe disporre di un criterio che consenta di verificare la proprietà di raggiungibilità per *ciascuno* di essi. In effetti nel paragrafo precedente ci si è limitati a dare solo la condizione sotto la quale *tutti* i punti dello spazio di stato sono raggiungibili. Su questo esempio particolare, tuttavia, si possono ottenere indicazioni ulteriori per via diretta; infatti, data la simmetria del circuito, non è possibile, agendo all'ingresso, far assumere alle tensioni sui condensatori valori che non siano uguali e opposti, se inizialmente $v_1(0) = v_2(0) = 0$. Si può dunque dire che nessuno dei punti esterni al piano indicato in fig.IV.2 è raggiungibile.

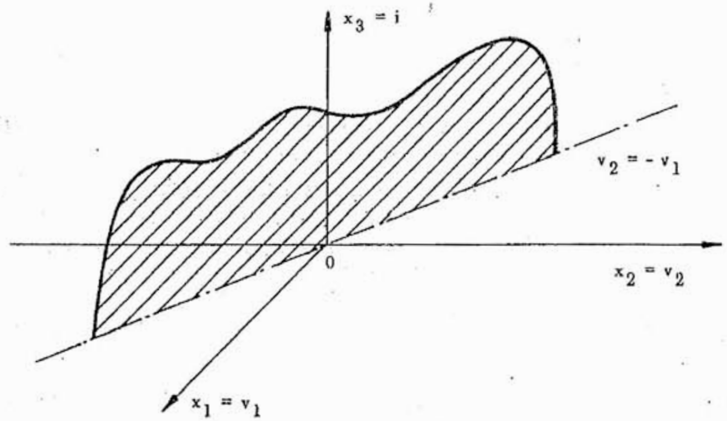

Fig.IV.2

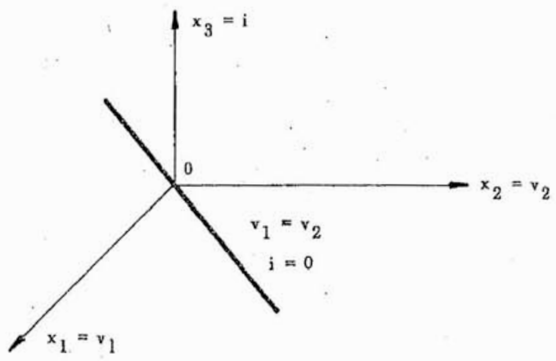

Fig.IV.3

È stato anche stabilito che solo il modo pseudoperiodico può essere osservato sull'uscita; si può quindi asserire che esistono degli stati inosservabili. Ciò può essere nuovamente verificato per via diretta basandosi sulla simmetria del circuito: se le tensioni iniziali sui condensatori sono identiche, una corrente nell'induttanza inizialmente nulla si mantiene tale per tutti gli istanti di tempo futuri. In altri termini gli stati appartenenti alla retta indicata in fig.IV.3 sono inosservabili.

A proposito di questo esempio è facile anche rendersi conto che ciascuna delle rette parallele alla retta $(v_1 = v_2;\ i = 0)$ è un luogo di punti dello spazio di stato tra loro equivalenti.

IV.5 - Il problema della realizzazione.

In questo paragrafo si stabiliranno le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un sistema lineare e stazionario possa essere rappresentato in modo completo dalla sola matrice delle risposte impulsive. Dall'analisi sviluppata nei paragrafi precedenti (cfr. in particolare le osservazioni alla fine del paragrafo IV.2) emerge il fatto che l'eccitabilità di tutti i modi naturali della risposta nello stato mediante impulsi in ingresso e la loro osservabilità attraverso l'uscita (o, il che è lo stesso, la raggiungibilità e l'osservabilità di tutti i punti dello spazio di stato) sono condizioni *necessarie* affinchè il problema considerato ammetta soluzione positiva. Si tratta ora di stabilire condizioni *sufficienti* ed anzi, collegandosi a quanto rilevato nella discussione alla fine del paragrafo IV.2, se possono essere assunte come tali le condizioni necessarie richiamate sopra.

Il problema posto è in sostanza un *problema di equivalenza di modelli* per un assegnato sistema (lineare e stazionario): in particolare si tratta di esaminare in quali condizioni la matrice $\mathbf{W}(t)$ delle risposte impulsive contiene *la stessa informazione* dei modelli ingresso-stato-uscita (assegnati, ad esempio, attraverso una terna di matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$).

In connessione con tale problema è usuale formularne un altro in questo modo: data una matrice $q \times p$ di funzioni del tempo, in quali condizioni questa può essere interpretata come matrice delle risposte impulsive di un sistema dinamico (di ordine finito) lineare e stazionario? In caso positivo, come si determina una rappresentazione ingresso-stato-uscita di detto sistema? Questo problema viene detto *problema della realizzazione* e sostanzialmente è un particolare problema di associabilità ed associazione dello stato ad una assegnata descrizione ingresso-uscita (cfr. pagg.23-24). La sua soluzione, il cui interesse nella presente tematica è motivato dalla esigenza di rispondere al quesito relativo all'equivalenza dei modelli, è importante anche in rapporto al cosiddetto problema della sintesi (cfr. pagg.24-25 e pagg.48-50) in quanto fornisce gli elementi per l'effettiva costruzione di un sistema fisico che «realizza» l'assegnato comportamento ingresso-uscita.

Per sviluppare la teoria conviene innanzitutto partire da una definizione formale:

Definizione IV.3. Una matrice $\mathbf{W}$, $q \times p$, di funzioni definite sull'insieme R dei numeri reali (o, rispettivamente, di funzioni definite sull'insieme C dei numeri complessi) è *realizzabile* mediante un sistema dinamico, di ordine finito, lineare e stazionario, strettamente proprio, se esistono tre matrici costanti $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, rispettivamente $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ tali che:

$$\text{(IV.47)} \qquad \mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{B} = \mathbf{W}(t) \qquad \forall t \in R$$

(o, rispettivamente,

$$\text{(IV.48)} \qquad \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{B} = \mathbf{W}(s) \qquad \forall s \in C)$$

La terna $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ viene detta *realizzazione* della matrice $\mathbf{W}$ e l'intero n sua *dimensione*. ◁

Condizioni necessarie e sufficienti che assicurino la realizzabilità di un'assegnata matrice $\mathbf{W}$ possono essere date riferendosi alla rappresentazione come funzione di t o come funzione di s. È chiaro tuttavia che condizioni nel dominio di t implicano equivalenti condizioni in quello di s e viceversa. La più diffusa di queste ultime è la seguente: *un'assegnata matrice* $\mathbf{W}(s)$ *di funzioni di variabile complessa è realizzabile se e solo se tali funzioni sono razionali strettamente proprie*[1].

La necessità della suddetta condizione discende ovviamente dalla (IV.48) stessa (cfr. pag.92). Per provare la sufficienza si mostrerà che se $\mathbf{W}(s)$ è una matrice di funzioni razionali strettamente pro-

(1) - La corrispondente condizione nel dominio di t è che ogni elemento di $\mathbf{W}(t)$ ammetta una rappresentazione del tipo:

$$\text{(a)} \qquad w(t) = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{k=1}^{\nu_i} r_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{p_i t}$$

Infatti, ogni funzione razionale può essere espressa nella forma (24) dell'Appendice A.III.2 e la (a) ne è la trasformata inversa di Laplace.

prie si possono sempre trovare tre matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ tali da soddisfare la (IV.48). Riferendosi, ad esempio, alla rappresentazione di $\mathbf{W}(s)$ come rapporto di polinomi:

$$\mathbf{W}(s) = \frac{\mathbf{B}_{m-1} s^{m-1} + \dots + \mathbf{B}_1 s + \mathbf{B}_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{IV.49}$$

si definiscano le tre matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{I} \\ -a_0\mathbf{I} & -a_1\mathbf{I} & -a_2\mathbf{I} & \dots & -a_{m-1}\mathbf{I} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{IV.50}$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}_0 \;\; \mathbf{B}_1 \;\; \mathbf{B}_2 \;\; \dots \;\; \mathbf{B}_{m-1})$$

in cui i blocchi $\mathbf{0}$ e $\mathbf{I}$ sono tutti a dimensione $p \times p$ (si osservi che $\mathbf{A}$ è $mp \times mp$). La verifica che la terna così definita soddisfa alla (IV.48), grazie alla forma di $\mathbf{B}$, comporta solo il calcolo dell'ultima colonna (a blocchi) di $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$; questa risulta:

$$\frac{1}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ s\mathbf{I} \\ s^2\mathbf{I} \\ \vdots \\ s^{m-1}\mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{IV.51}$$

Premoltiplicando per $\mathbf{C}$ si ottiene la (IV.49). Così la prova risulta completa[1].

(1) - Per una prova alternativa, di tipo euristico, si veda l'Appendice A.III.2.

È facile constatare che *se un'assegnata matrice* $\mathbf{W}$ *ammette una realizzazione* (sia essa $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$) *essa ne ammette infinite*. Infatti anche ogni altra terna di matrici del tipo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\,\mathbf{A}_0\,\mathbf{T}^{-1}\,, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T}\,\mathbf{B}_0\,, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0\,\mathbf{T}^{-1} \tag{IV.52}$$

(ove $\mathbf{T}$ sia una matrice $n \times n$ non singolare) è ancora una realizzazione, come si verifica immediatamente nella (IV.47) tenendo presente che [applicando la (III.5)]:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}\, e^{\mathbf{A}_0 t}\, \mathbf{T}^{-1} \tag{IV.53}$$

Questo, ovviamente, è il riflesso della proprietà che la matrice delle risposte impulsive è invariante rispetto ad una trasformazione di coordinate nello spazio di stato, se si pensa al sistema dinamico che si può associare ad una terna di matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

Dalla realizzazione $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ se ne possono però derivare anche altre di dimensione diversa; ad esempio con le relazioni:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = (\mathbf{C}_0 \;\; \tilde{\mathbf{C}}) \tag{IV.54}$$

(ove $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ sono arbitrarie matrici di dimensioni appropriate). Ciò si può verificare tenendo presente che [applicando (III.5)]:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{A}_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \end{pmatrix} \tag{IV.55}$$

Questo fatto, in termini di proprietà dei sistemi dinamici, è da mettere in corrispondenza con le considerazioni svolte nei paragrafi IV.2 e IV.3. Infatti il sistema definito dalle (IV.54) può considerarsi il parallelo di due sottosistemi, uno dei quali non ha nessun modo naturale eccitabile dall'ingresso e quindi non dà contributo alla matrice delle risposte impulsive dell'intero sistema. In generale si può dire che la dimensione di una realizzazione può essere aumentata in modo arbitrario, aggiungendo sottosistemi che non interagiscono con l'ingresso, con l'uscita o con entrambi nel sistema dinamico corrispondente,

A questo punto appare naturale pensare più che a *una* realizzazione dell'assegnata matrice $\mathbf{W}$ all'*insieme di tutte* le realizzazioni ad essa associate. Riveste particolare interesse il considerare, in tale insieme, le realizzazioni la cui dimensione n è la più piccola possibile e cioè le cosiddette *realizzazioni minime*. Per rendersi conto di tale interesse, basta pensare al significato del problema della realizzazione dell'ambito di quello della sintesi; in tale ambito la dimensione n corrisponde al numero di integratori presenti nel sistema fisico che realizza l'assegnata matrice **W** e quindi una realizzazione minima individua uno schema con minimo numero di integratori.

La considerazione delle realizzazioni minime pone i seguenti due problemi:

a) individuare *condizioni necessarie e sufficienti di minimalità* (che permettano quindi di riconoscere se una realizzazione **A**, **B**, **C** associata ad un'assegnata matrice **W** è minima o no);

b) fornire procedimenti per calcolare realizzazione minime (*metodi di realizzazione*).

Il secondo problema sarà trattato nel paragrafo successivo. Nell'ambito del primo di essi un risultato importante consiste nel fatto che la minimalità di una realizzazione può essere caratterizzata in termini di proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema dinamico ad essa associato. Tale risultato stabilisce una stretta connessione tra il problema della realizzazione (associazione dello stato), da un lato, e quello dell'analisi delle proprietà dello spazio di stato (relativamente all'interazione con ingresso e, rispettivamente, uscita), dall'altro. Formalmente si può enunciare la seguente condizione: *una realizzazione è minima se e solo se il sistema dinamico ad essa associato è raggiungibile e osservabile*. La dimostrazione è data nell'Appendice A.IV.1 [Parte (a)].

Un altro risultato importante che si può stabilire riguarda la possibilità di descrivere, mediante opportune relazioni, *tutte le realizzazioni minime* di un'assegnata matrice **W**. In proposito, è stato già osservato che una trasformazione del tipo (IV.52) porta ancora ad una realizzazione; d'altra parte, essa lascia invariata la dimensione e quindi anche la minimalità. Si può inoltre dimostrare che due arbitrarie realizzazioni minime ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$) e ($\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$) di una stessa matrice **W** sono necessariamente legate da una relazione del tipo (IV.52); si veda in proposito la Appendice A.IV.1 [Parte (b)].

Da questi due fatti si può dedurre che, effettuando una trasformazione del tipo (IV.52) su un'assegnata realizzazione minima (il che corrisponde, come si è più volte visto, ad un cambiamento di coordinate nello spazio di stato del sistema dinamico associato) si ottengono tutte e sole le altre realizzazioni minime. In altri termini, *la realizzazione minima di un'assegnata matrice* **W** *è unica a meno di una trasformazione di coordinate nello spazio di stato.*

Gli elementi di teoria della realizzazione che si sono qui presentati consentono, come si era preannunciato, di rispondere al quesito che ispira il paragrafo. Si abbia infatti un sistema raggiungibile ed osservabile (che quindi soddisfa alle condizioni *necessarie* affinchè la sua matrice delle risposte impulsive possa essere assunta come modello completo): la terna di matrici **A**, **B**, **C** di una sua rappresentazione costituisce ovviamente una realizzazione della propria matrice di risposte impulsive **W**; grazie alla teoria sviluppata, tale terna costituisce in particolare una *realizzazione minima* e quindi, come tale, è completamente definita dalla **W** stessa [a meno di una relazione del tipo (IV.52)]. Si può dunque concludere che le condizioni di raggiungibilità ed osservabilità sono *sufficienti* affinchè **W** costituisca un modello completo del sistema. Le procedure esplicite per ricostruire il sistema dinamico a partire dalla matrice **W** coincidono ovviamente con le procedure per la costruzione di una realizzazione minima; ad esse si darà un cenno nel paragrafo successivo.

IV.6 - Sui metodi di realizzazione di una matrice di trasferimento W(s).

È utile ribadire che un aspetto essenziale della teoria della realizzazione è costituito dallo studio dei metodi per il calcolo esplicito di realizzazioni minime. Si pensi in proposito all'interesse della teoria della realizzazione dal punto di vista del problema della sintesi ed all'osservazione già fatta, in tale ambito, a proposito del ruolo della minimalità. Poichè, d'altra parte, per i sistemi raggiungibili e osservabili la matrice delle risposte impulsive è un modello completo, tali metodi possono essere anche interpretati come metodi per passare dal modello costituito da **W** al modello ingresso-stato-uscita.

La messa a punto di metodi di realizzazione minima ha costituito l'oggetto di molti studi ed, in effetti, attualmente di si dispone di numerosi algoritmi che risolvono il problema. Un carattere comune a tutti questi algoritmi risiede nel ricorso, in una opportuna fase del procedimento, a qualche espediente che garantisce la minimalità della realizzazione che si sta costruendo; ciò normalmente avviene avvalendosi dalla connessione che si è stabilita tra minimalità e proprietà strutturali (raggiungibilità e osservabilità). Ciò che li differenzia sono, da un lato, la particolarità dell'espediente di volta in volta adottato e, dall'altro, la natura dei dati mediante i quali viene definita la matrice **W**. Questa ultima, di solito, viene assegnata o mediante i parametri che ne caratterizzano una rappresentazione analitica o attraverso i grafici (o tabulati) delle funzioni (di t o di ω) che ne costituiscono gli elementi. A queste due diverse situazioni sono, nell'ordine, dedicati il presente paragrafo ed il successivo; nello spirito di queste note, la trattazione sarà limitata ad alcuni elementi particolarmente utili per lo studio dei sistemi con ingresso ed uscita unidimensionali.

Quando il dato di partenza è una rappresentazione analitica della matrice $\mathbf{W}(s)$ delle funzioni di trasferimento, un modo di utilizzare la teoria strutturale per garantire la minimalità delle realizzazioni, è quello di avvalersi della possibilità di decomporre un sistema in quattro sottosistemi, uno solo dei quali significativo ai fini del legame ingresso-uscita e quindi raggiungibile ed osservabile. Sulla base di questa osservazione si può pensare ad un procedimento di realizzazione minima nei seguenti termini:

a) si costruisca una qualsiasi realizzazione a partire dai parametri che caratterizzano $\mathbf{W}(s)$;

b) si decomponga il relativo sistema dinamico in quattro parti e se ne consideri solo il sottosistema raggiungibile ed osservabile. Questo individua la realizzazione minima cercata.

Nell'arbitrarietà lasciata aperta a proposito del punto (a), è chiaro l'interesse a procedure sistematiche. Ad esempio, la procedura indicata nella prova di sufficienza della condizione di realizzabilità nel paragrafo precedente e condensata nella formula (IV.50) consente di passare immediatamente dai coefficienti a_i e $\mathbf{B}_i$ che caratterizzano la matrice di trasferimento $\mathbf{W}(s)$ ad una terna di matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ che la realizza.

Un altro modo di passare dai coefficienti a_i e $\mathbf{B}_i$ alla realizzazione di $\mathbf{W}(s)$, fa riferimento alla formula, in qualche senso duale alla precedente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -a_0\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -a_1\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & -a_2\mathbf{I} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & -a_{m-1}\mathbf{I} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{B}_{m-1} \end{pmatrix} \tag{IV.56}$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \dots \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{I})$$

ove i blocchi $\mathbf{0}$ ed $\mathbf{I}$ sono tutti a dimensione $q \times q$. La prova che le (IV.56) costituiscono una realizzazione può essere condotta in modo analogo a quello adottato nel caso della (IV.50).

Salvo in casi speciali, nè l'una nè l'altra di queste realizzazioni è minima (cioè congiuntamente raggiungibile e osservabile). Allo scopo di chiarire questo punto, è interessante analizzare le proprietà strutturali dei sistemi dinamici associati a tali realizzazioni. Relativamente alla prima di esse si può dire che il sistema descritto dalle (IV.50):

α) è, in ogni caso, raggiungibile;

β) è anche osservabile, nel caso in cui $p = 1$, se e solo se il polinomio $a_0 + a_1 s + \dots a_{n-1} s^{n-1} + s^n = d(s)$ è il minimo denominatore comune degli elementi di $\mathbf{W}(s)$ (cioè se nessuna delle sue radici è contemporaneamente radice di tutti i polinomi a numeratore degli elementi di $\mathbf{W}(s)$). A proposito di tale condizione, si usa dire che non vi sono «fattori comuni» o non vi sono «cancellazioni» tra il denominatore e gli elementi della matrice a numeratore in $\mathbf{W}(s)$.

La prima proprietà si verifica immediatamente applicando il criterio di raggiungibilità descritto al paragrafo IV.3 e, in particolare, verificando che la matrice $[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \dots \mathbf{A}^{mp-1}\mathbf{B}]$ ha rango mp (si ricordi che la dimensione della realizzazione (IV.50) è pari a mp). Tale verifica si può limitare a constatare che il determinante della sottomatrice $[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \dots \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{B}]$ è diverso da zero (pari a $+1$, ovvero a -1, a seconda dei valori di m e di p).

Per la verifica della seconda condizione è facile fornire una prova diretta, indipendente da quanto già visto per la raggiungibilità. Si osservi infatti che, se $p = 1$, la dimensione della realizzazione (IV.50) è pari al grado m del denominatore comune di $\mathbf{W}(s)$. Se tale denominatore non fosse di grado minimo, si potrebbe, cancellando i fattori comuni, pervenire ad una espressione di $\mathbf{W}(s)$ avente un denominatore comune di grado inferiore e, da questa, ancora con le (IV.50), ad una realizzazione a dimensione inferiore. Viceversa se tale denominatore è quello minimo, non può esistere una realizzazione $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$ a dimensione $\hat{m} < m$. In un tale caso, infatti, dovrebbe essere:

$$\hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\hat{d}(s)}\hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{a}\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{W}(s) \tag{IV.57}$$

con il grado di $\hat{d}(s)$ uguale ad $\hat{m}$. Ciò sarebbe in contraddizione con l'assunto che il minimo denominatore comune di $\mathbf{W}(s)$ ha grado pari ad m.

Proprietà duali si possono verificare per la realizzazione definita dalle (IV.56); più precisamente si ha che il sistema da esse caratterizzato:

α) è, in ogni caso, osservabile;

β) è anche raggiungibile, nel caso in cui $q = 1$, se e solo se il polinomio $d(s)$ è il minimo denominatore comune degli elementi di $W(s)$.

Una situazione particolare ma di largo interesse è quella in cui $p = q = 1$ (sistema con ingresso ed uscita unidimensionali). In questo caso *se non vi sono fattori comuni tra numeratore e denominatore della funzione di trasferimento, entrambe le realizzazioni* (IV.50) *e* (IV.56) *sono minime.*

Concludendo la discussione del punto (a) si può dunque osservare che in taluni casi particolari i procedimenti di associazione dello stato del tipo sopra considerato sono tali da garantire la minimalità. In generale questo però non è vero e quindi occorre passare alla fase (b). I procedimenti per estrarre una realizzazione minima prendono il nome di procedimenti di *riduzione* e per essi sono disponibili algoritmi basati sull'impiego delle condizioni di raggiungibilità ed osservabilità[1].

IV.7 - Sui metodi di realizzazione a partire da successioni di dati numerici.

I metodi di realizzazione considerati nel paragrafo precedente presuppongono, come dato di partenza del problema, la conoscenza di una rappresentazione analitica della funzione W. Si può verificare tuttavia che quest'ultima sia assegnata mediante successioni di dati numerici; ciò avviene, ad esempio, quando si dispone dei grafici delle funzioni che costituiscono gli elementi di $W(t)$ o di $W(j\omega)$ (cioè della matrice delle risposte impulsive o di quella delle risposte armoniche) e si associa a ciascun grafico una successione di numeri costituita dai valori assunti dalla funzione in corrispondenza ad opportuni valori delle ascisse.

Quando si parte da un tale tipo di dati, appare naturale formulare il seguente problema: *determinare un sistema dinamico (lineare e stazionario) di ordine minimo la cui risposta impulsiva o la cui risposta armonica, rispettivamente, coincida, ai valori prescritti di t o di ω, con i dati numerici assegnati.* Ricordando i risultati dell'analisi svolta nel paragrafo precedente, è facile constatare che un problema di questo tipo è equivalente a quello di interpolare una successione di dati numerici con

(1) - Se la realizzazione su cui si opera è minima l'applicazione di tali procedimenti equivale alla verifica della proprietà di raggiungibilità ed osservabilità e non è, dal punto di vista computazionale, più onerosa.

funzioni di tipo assegnato (esponenziali nel caso di t; razionali strettamente proprie nel caso di ω). Tuttavia lo si può considerare anche affine ai problemi di realizzazione in quanto viene imposto che la funzione interpolatrice soddisfi ad una determinata condizione di minimalità (quella dell'ordine nel sistema dinamico corrispondente). Ad esempio, se il caso in esame è relativo ad un sistema con ingresso e uscita unidimensionali e con autovalori distinti, tale condizione è quella di rendere minimo il numero delle funzioni esponenziali che intervengono nella funzione interpolatrice.

Caso di funzioni di t. Si consideri dunque il caso in cui sia assegnata una funzione $f(t)$ (il che equivale, in termini di sistema, a considerare la risposta impulsiva nel caso di ingresso e uscita unidimensionali). Una formalizzazione conveniente del problema generale introdotto sopra può essere data nei seguenti termini:

data una successione di valori della funzione assegnata:

$$f_k = f(kT) \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{IV.58}$$

(con T costante reale) trovare tre matrici costanti, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, *rispettivamente* $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$ *con* n *minimo, tali che sia*[1]:

$$\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A} kT}\, \mathbf{B} = f_k \qquad \forall k \tag{IV.59}$$

Una prima condizione da analizzare riguarda l'esistenza della soluzione. In proposito si può dimostrare che *questa soluzione esiste se e solo se:*

a) *esiste un intero* m *tale che la prima colonna della matrice (ad infinite righe):*

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ f_1 & f_2 & \dots & f_m & f_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ f_k & f_{k+1} & \dots & f_{k+m-1} & f_{k+m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{IV.60}$$

è linearmente dipendente dalle successive. Se inoltre:

(1) - Viene qui formulato, in termini sistemistici, un classico problema di interpolazione dovuto a Prony.

b) *le* m colonne della matrice:

$$(IV.61) \qquad \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{m-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_k & f_{k+1} & \dots & f_{k+m-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, l'intero m *risulta essere il minimo valore di* n *per cui la (IV.59) è soddisfatta.*

La prova che la condizione (a) è necessaria è immediata. Se infatti esistono tre matrici **A**, **B**, **C** rispettivamente $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, che soddisfano alla (IV.59), posto:

$$(IV.62) \qquad \tilde{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}T}$$

si ha:

$$(IV.63) \qquad \mathbf{C}\, \tilde{\mathbf{A}}^k\, \mathbf{B} = f_k \qquad \forall k$$

Tenendo presente ora che la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ soddisfa alla sua equazione caratteristica (teorema di Cayley-Hamilton), indicata quest'ultima con $\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, si ha:

$$(IV.64) \qquad \tilde{\mathbf{A}}^{k+m} + a_{m-1}\tilde{\mathbf{A}}^{k+m-1} + \dots + a_1 \tilde{\mathbf{A}}^{k+1} + a_0 \tilde{\mathbf{A}}^k = \mathbf{0} \qquad \forall k$$

Da questa, moltiplicando a sinistra per **C**, a destra per **B**, e tenendo conto della (IV.63), si ha:

$$(IV.65) \qquad f_{k+m} + a_{m-1} f_{k+m-1} + \dots + a_1 f_{k+1} + a_0 f_k = 0 \qquad \forall k$$

Si osservi ora che, per la non singolarità della funzione $e^{\tilde{\mathbf{A}}t}$, dalla (IV.62) consegue:

$$(IV.66) \qquad |\tilde{\mathbf{A}}| \neq 0$$

Da questa, tenendo presente l'espressione dell'equazione caratteristica, si ha anche:

$$(IV.67) \qquad a_0 = (|\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}|)_{\lambda=0} = |-\tilde{\mathrm{A}}| \neq 0$$

Grazie a quest'ultima condizione, la (IV.65) si può riscrivere:

$$(IV.68) \qquad f_k = -\frac{a_1}{a_0} f_{k+1} - \dots - \frac{a_{m-1}}{a_0} f_{k+m-1} - \frac{1}{a_0} f_{k+m} \qquad \forall k$$

e cioè la condizione (a).

Per dimostrare la sufficienza di questa, si mostrerà che se essa è verificata, è possibile determinare tre matrici **A**, **B**, **C** che soddisfano alla (IV.59); si darà cioè una «dimostrazione costruttiva». Se la condizione (a) è verificata, esistono m numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$, non tutti nulli, tali che:

$$(IV.69) \qquad f_k + \alpha_1 f_{k+1} + \dots + \alpha_{m-1} f_{k+m-1} + \alpha_m f_{k+m} = 0 \qquad \forall k$$

Sia n l'interno per cui:

$$(IV.70) \qquad \alpha_n \neq 0 \quad ; \quad \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = \alpha_m = 0$$

(tale intero può essere anche pari ad m). Allora, posto:

$$(IV.71) \qquad \begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{\alpha_n} \\ a_i &= \frac{-\alpha_i}{\alpha_n} \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

si ha:

$$(IV.72) \qquad a_0 f_k + a_1 f_{k+1} + \dots + a_{n-1} f_{k+n-1} = f_{k+n} \qquad \forall k$$

Si definiscano ora le matrici:

$$(IV.73) \qquad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0)$$

Per la (IV.72), si ha:

$$\text{(IV.74)} \qquad \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{k+n} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} f_{k} \\ f_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{k+n-1} \end{pmatrix} \qquad \forall\, k$$

e quindi, tenendo anche presente la espressione di $\mathbf{B}$:

$$\text{(IV.75)} \qquad \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{k+n} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}\,\tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} f_{k-1} \\ f_{k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{k+n-2} \end{pmatrix} = \ldots = \tilde{\mathbf{A}}^{k+1} \begin{pmatrix} f_{0} \\ f_{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}^{k+1}\mathbf{B} \qquad \forall\, k$$

Da questa, premoltiplicando per $\mathbf{C}$, si perviene alla:

$$\text{(IV.76)} \qquad \mathbf{C}\,\tilde{\mathbf{A}}^{k}\,\mathbf{B} = f_k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Poichè inoltre $\mathbf{C}\mathbf{B} = f_0$, essa vale anche per $k = 0$.

Si definisca, infine, una matrice $\mathbf{A}$ tale che:

$$\text{(IV.77)} \qquad e^{\mathbf{A}T} = \tilde{\mathbf{A}}$$

Tale equazione ammette soluzione in $\mathbf{A}$ se e solo se $|\tilde{\mathbf{A}}| \neq 0$[1]: questa condizione risulta peraltro soddisfatta in quanto, per le (IV.73) e (IV.71) $|\tilde{\mathbf{A}}| = (-1)^{n+1} a_0 \neq 0$. Grazie quindi a questa posizione, la (IV.76) equivale alla (IV.59) e quindi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ costituiscono la soluzione cercata.

Si mostrerà ora il risultato concernente la minimalità. Si osservi innanzitutto che, se vale la condizione (b), la (IV.59) ammette solo soluzioni con $n \geq m$. Se infatti esistesse una soluzione con $n < m$, ripetendo il ragionamento sopra svolto a proposito della necessità, si potrebbe concludere che le prime $n + 1 \leq m$ colonne della (IV.61) sarebbero linearmente dipendenti e ciò contraddirebbe la condizione (b). D'altra parte si è già mostrato che, se vale anche la (a), esiste una realizzazione a dimensione $n \leq m$ e quindi si può concludere che, necessariamente, $n = m$. Cioè l'intero per cui valgono (a) e (b) è il minimo valore di n per cui la (IV.59) può essere soddisfatta.

(1) - Si veda, in proposito, il testo di F.R. Gantmacher: *Matrix Theory*, Chelsea (New York), 1959, pp. 239-241.

Sulla base dei risultati fin qui acquisiti è possibile delineare, in linea di principio, *procedimento per passare dalla successione di dati* $\{f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots\}$ *ad una terna di matrici, di minima dimensione, che soddisfi alla* (IV.59). Si può procedere infatti nel seguente modo:

1) Si determina se la successione assegnata soddisfa alle condizioni di «realizzabilità», riferite alla ricerca della minima dimensione, cioè alle condizioni (a) e (b). Da un punto di vista operativo, tale verifica si può effettuare in due fasi distinte. Nella prima di esse (fase 1a) si determina, se esiste, un intero m tale che la matrice (IV.61) abbia le m colonne linearmente indipendenti e la matrice (IV.60) abbia le $m + 1$ colonne linearmente dipendenti. Nella seconda (fase 1b) si verifica se la dipendenza lineare - già stabilita - delle colonne della (IV.60) è tale che la prima di esse sia combinazione lineare delle successive.

1a) Per la verifica della dipendenza (indipendenza) lineare, può essere utile servirsi della proprietà che una assegnata matrice $\mathbf{F}$ ha le colonne linearmente indipendenti se e solo se $\mathbf{F}'\,\mathbf{F}$ risulta non singolare[1]. Basandosi su questo fatto, posto:

(1) - Per la prova di questa proprietà, si può mostrare che la singolarità di $\mathbf{F}'\,\mathbf{F}$ implica la dipendenza lineare delle colonne di $\mathbf{F}$ e ne è implicata. Infatti, se $\mathbf{F}'\,\mathbf{F}$ è singolare, esiste un vettore $\gamma \neq 0$ tale che:

$$\mathbf{F}'\,\mathbf{F}\,\gamma = \mathbf{0}$$

Da questa, premoltiplicando per γ', si ottiene anche:

$$0 = \gamma'\,\mathbf{F}'\,\mathbf{F}\,\gamma = (\mathbf{F}\gamma)'\,(\mathbf{F}\gamma)$$

Poichè l'ultimo membro è un numero positivo, da questa risulta necessariamente:

$$\mathbf{F}\,\gamma = \mathbf{0}$$

e cioè la dipendenza lineare delle colonne di $\mathbf{F}$. Inversamente, se vale quest'ultima condizione, si prova che:

$$\mathbf{F}'\,\mathbf{F}\,\gamma = \mathbf{0}$$

e quindi la singolarità di $\mathbf{F}'\,\mathbf{F}$.

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{k-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} \tag{IV.78}$$

per determinare m è sufficiente calcolare la successione di determinanti $|\mathbf{F}'_1\ \mathbf{F}_1|$, $|\mathbf{F}'_2\ \mathbf{F}_2|$, ..., $|\mathbf{F}'_k\ \mathbf{F}_k|$, ... ed individuare il primo indice per il quale un determinante è nullo; tale indice è evidentemente pari ad m + + 1. Va immediatamente rilevato che le matrici prese in esame sono infinite, in conseguenza - peraltro ovvia - del fatto che si è ammessa la conoscenza di un numero infinito di dati. Sul piano pratico occorre supporre di avere a disposizione una quantità finita di dati. Se questi sono in numero di N si possono organizzare nelle seguenti matrici:

$$\mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{k-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{N-k-3} & f_{N-k-2} & \dots & f_{N-2} \end{pmatrix} \tag{IV.79}$$

$$\mathbf{h}_k = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \tag{IV.80}$$

Sulla base delle stesse considerazioni svolte per il caso di dati infiniti, è facile rendersi conto che, in questo caso, il numero m è caratterizzato dalla condizione:

$$|\mathbf{G}'_m\ \mathbf{G}_m| \neq 0 \qquad |(\mathbf{G}_m\ \ \mathbf{h}_m)'\ (\mathbf{G}_m\ \ \mathbf{h}_m)| = 0 \tag{IV.81}$$

Da ciò è chiaro anche che, affinchè il procedimento abbia senso [e cioè si possa trovare un m che soddisfi la (IV.81)], deve essere $N \geq 2m + 1$; ciò significa ammettere che i dati di partenza siano «in numero sufficiente».

1b) Si determinano i parametri $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ risolvendo l'equazione:

$$\mathbf{G}_m \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = \mathbf{h}_m \tag{IV.82}$$

che, per le (IV.81), ammette una ed una sola soluzione. Un modo di trovarla consiste nel premoltiplicare a sinistra per $\mathbf{G}'_m$ ambo i membri del-della (IV.82) e nell'isolare successivamente il vettore incognito avvalendosi della non singolarità di $\mathbf{G}'_m\ \mathbf{G}_m$ [cfr. (IV.81)]. Si ha allora:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = (\mathbf{G}'_m\ \mathbf{G}_m)^{-1}\ \mathbf{G}'_m\ \mathbf{h}_m \tag{IV.83}$$

Se da tali calcoli risulta $a_0 \neq 0$, si può concludere che (a) e (b) sono soddisfatte, in quanto la dipendenza lineare delle (m + 1) colonne della (IV.60) è tale da soddisfare, in particolare, la (IV.69). Se invece $a_0 = 0$ le condizioni (a) e (b) non possono essere soddisfatte e quindi non esiste soluzione al problema.

2) Si calcola la terna di matrici **A**, **B**, **C** attraverso le formule (IV.73) e (IV.77).

Caso di funzioni di ω. Se è assegnata una funzione complessa $g(\omega)$ di variabile reale ω (in termini di sistema: una risposta armonica), il problema, analogo a quello precedentemente considerato per le funzioni di t, può essere formalizzato nei seguenti termini:

data una successione di valori della funzione assegnata:

$$g_k = g(\omega_k) \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{IV.84}$$

trovare tre matrici costanti **A**, **B**, **C**, *rispettivamente* $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, *con* n *minimo, tali che sia:*

$$\mathbf{C}(j\omega_k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = g_k \qquad \forall k \tag{IV.85}$$

Per quanto riguarda l'esistenza della soluzione si può dimostrare che *questa esiste se e solo se*:

a) *esiste un intero* m *tale che l'ultima colonna della matrice (a infinite righe)*:

$$\begin{pmatrix} 1 & j\omega_0 & \dots & (j\omega_0)^{m-1} & g_0 & g_0(j\omega_0) & \dots & g_0(j\omega_0)^{m-1} & g_0(j\omega_0)^m \\ 1 & j\omega_1 & \dots & (j\omega_1)^{m-1} & g_1 & g_1(j\omega_1) & \dots & g_1(j\omega_1)^{m-1} & g_1(j\omega_1)^m \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & j\omega_k & \dots & (j\omega_k)^{m-1} & g_k & g_k(j\omega_k) & \dots & g_k(j\omega_k)^{m-1} & g_k(j\omega_k)^m \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \end{pmatrix} \tag{IV.86}$$

dipende linearmente dalle colonne che la precedono, secondo coefficienti reali. Se inoltre:

b) *le* $2m$ *colonne delle matrice*:

$$\begin{pmatrix} 1 & j\omega_0 & \dots & (j\omega_0)^{m-1} & g_0 & g_0(j\omega_0) & \dots & g_0(j\omega_0)^{m-1} \\ 1 & j\omega_1 & \dots & (j\omega_1)^{m-1} & g_1 & g_1(j\omega_1) & \dots & g_1(j\omega_1)^{m-1} \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 1 & j\omega_k & \dots & (j\omega_k)^{m-1} & g_k & g_k(j\omega_k) & \dots & g_k(j\omega_k)^{m-1} \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \end{pmatrix} \tag{IV.87}$$

sono linearmente indipendenti sul campo R *dei numeri reali, l'intero* m *risulta essere il minimo valore di* n *per cui la (IV.85) è soddisfatta.*

Per provare la necessità di questa condizione, si considerino tre matrici **A**, **B**, **C**, rispettivamente $m \times m$, $m \times 1$, e $1 \times m$, che soddisfano la (IV.85), e si definisca la funzione (complessa di variabile reale ω) $\mathbf{C}(j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. Questa è una funzione razionale strettamente propria che si può porre nella forma:

$$\mathbf{C}(j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} b_i (j\omega)^i}{(j\omega)^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (j\omega)^i} \tag{IV.88}$$

Grazie alla (IV.85) si ha quindi:

$$g_k = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} b_i (j\omega_k)^i}{(j\omega_k)^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (j\omega_k)^i} \qquad \forall k \tag{IV.89}$$

o, il che è lo stesso,

$$\begin{aligned} &b_0 + b_1(j\omega_k) + \dots + b_{m-1}(j\omega_k)^{m-1} - \\ &- a_0 g_k - a_1 g_k (j\omega_k) - \dots - a_{n-1} g_k (j\omega_k)^{m-1} = g_k (j\omega_k)^m \,, \quad \forall k \end{aligned} \tag{IV.90}$$

Questo equivale alla condizione (a).

Per provare che tale condizione è sufficiente, basta tenere presente che la condizione (a) implica l'esistenza di $2m$ numeri $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ non tutti nulli, che rendono valida una relazione del tipo (IV.90). Pertanto, a partire da tali numeri, si può definire una funzione razionale strettamente propria avente la struttura del secondo membro della (IV.88) e soddisfacente, per costruzione, la (IV.89). Tale funzione razionale può sempre essere messa nella forma del primo membro della (IV.88) se si definiscono tre matrici $m \times m$, $m \times 1$, $1 \times m$ con le relazioni [cfr. (IV.50)]:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{IV.91}$$

$$\mathbf{C} = (b_0 \ \ b_1 \ \ b_2 \ \dots \ b_{m-1})$$

Si è quindi dimostrato che la condizione (a) implica l'esistenza di tre matrici **A**, **B**, **C** che soddisfano alla (IV.85).

Si dimostrerà ora il risultato concernente la minimalità (in modo perfettamente analogo a quanto svolto per le funzioni di t). Se vale la condizione (b), la (IV.85) ammette soluzioni solo con $n \geq m$; se infatti fosse $n < m$ si potrebbe concludere (cfr. prova della necessità) che la colonna $(m+n+1)$-esima della matrice (IV.87) è combinazione lineare di colonne precedenti (delle prime n e di quelle comprese tra la $(m+1)$-esima e la $(m+n)$-esima). Ciò contraddirebbe la condizione (b) stessa. D'altra parte, se vale anche la (a), è possibile (cfr. prova della sufficienza) costruire una realizzazione a dimensione $n = m$. Pertanto si può concludere che l'intero per cui valgono (a) e (b) è il minimo valore di n per cui la (IV.83) può essere soddisfatta.

Il procedimento per passare dalla successione di dati $\{g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots\}$ *ad una terna di matrici, di minima dimensione, che soddisfi alla (IV.85)* può essere impostato in modo del tutto analogo a quello presentato per le funzioni di t. L'unica variante che occorre tenere presente è che gli elementi delle matrici (IV.86) e (IV.87) sono numeri complessi, mentre la dipendenza (o indipendenza) lineare delle loro colonne va considerata sul campo dei numeri reali.

L'analisi di tale dipendenza (o indipendenza) può essere condotta considerando le matrici ad elementi reali che si ottengono sostituendo a ciascuna riga di esse la coppia di righe costituite rispettivamente dalle parti reali e dai coefficienti delle parti immaginarie di ciascun elemento. Così, ad esempio, alla k-esima riga della (IV.86) corrispondono le due righe:

$$\text{(IV.92)} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & -\omega_k^2 & \ldots & u_k & -v_k\,\omega_k & -u_k\,\omega_k^2 & \ldots \\ 0 & \omega_k & 0 & \ldots & v_k & v_k\,\omega_k & -v_k\,\omega_k^2 & \ldots \end{matrix}$$

dove si è indicato:

$$\text{(IV.93)} \qquad g_k = u_k + j\,v_k \quad .$$

*

APPENDICE IV

A.IV.1 - Dimostrazione di risultati enunciati nel par.IV.5.

a) La prova che la minimalità implica la raggiungibilità e l'osservabilità si può effettuare per assurdo. Si supponga che il sistema dinamico associato ad una realizzazione minima non sia raggiungibile ed osservabile; lo si può allora decomporre in sottosistemi sfruttando l'assenza della raggiungibilità e/o dell'osservabilità. Uno solo di essi (il sistema $\mathcal{S}_b$) è significativo nel legame-ingresso uscita ed ha ordine minore di quello del sistema complessivo. Tale sottosistema definisce una realizzazione di dimensione minore di quella che si è assunta come minima e ciò è una contraddizione.

Per provare che la raggiungibilità è l'osservabilità implicano la minimalità, si considerino due arbitrarie realizzazioni (**A**, **B**, **C**) e ($\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$) rispettivamente di dimensione n ed $\hat{n}$, della stessa matrice **W**. Per definizione risulta:

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}\, e^{\hat{\mathbf{A}}t}\, \hat{\mathbf{B}} \qquad \forall t \in R$$

Calcolando questa espressione e le sue derivate successive per $t=0$ si ottiene:

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{C}\,\mathbf{A}^k\,\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}\,\hat{\mathbf{A}}^k\,\hat{\mathbf{B}} \qquad \forall k$$

Si ponga ora, con riferimento alla terna **A**, **B**, **C** :

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{P}_r = (\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{r-1}\,\mathbf{B})$$

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{CA}^{s-1} \end{pmatrix}$$

e si indichino con $\hat{\mathbf{P}}_r$, $\hat{\mathbf{Q}}_s$ le matrici costruite in modo analogo da $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$. È facile verificare che la (2) equivale alla:

$$\mathbf{P}_r \, \mathbf{Q}_s = \hat{\mathbf{P}}_r \cdot \hat{\mathbf{Q}}_s \qquad \forall r, \forall s \tag{5}$$

In particolare, si ha:

$$\mathbf{P}_\nu \cdot \mathbf{Q}_\nu = \hat{\mathbf{P}}_\nu \cdot \hat{\mathbf{Q}}_\nu \qquad \text{con} \qquad \nu = \max(n, \hat{n}) \tag{6}$$

Se ora si assume che $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ rappresenti un sistema raggiungibile ed osservabile, dai risultati del paragrafo IV.3 si ha:

$$\text{rango } \mathbf{P}_n = n \tag{7}$$

$$\text{rango } \mathbf{Q}_n = n \tag{8}$$

Queste, essendo $\nu \geq n$, implicano anche che:

$$\text{rango } \mathbf{P}_\nu = n \tag{9}$$

$$\text{rango } \mathbf{Q}_\nu = n \tag{10}$$

Le (9), (10) equivalgono al fatto che le n righe di $\mathbf{P}_\nu$ e le n colonne di $\mathbf{Q}_\nu$ sono linearmente indipendenti; quindi:

$$\text{rango } \mathbf{P}_\nu \, \mathbf{Q}_\nu = n \tag{11}$$

In modo identico, se anche la terna $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$ corrisponde ad un sistema raggiungibile ed osservabile, risulta che:

$$\text{rango } \hat{\mathbf{P}}_\nu \, \hat{\mathbf{Q}}_\nu = \hat{n} \tag{12}$$

La relazione (6) e le (11) (12) comportano dunque:

$$n = \hat{n} \tag{13}$$

Data l'arbitrarietà delle due realizzazioni considerate, si può concludere che tutte le realizzazioni di $\mathbf{W}$ che rappresentano sistemi raggiungibili ed osservabili hanno la stessa dimensione. Poichè tra esse sono certamente incluse le minime (che, per quanto provato all'inizio, soddisfano alla proprietà di raggiungibilità e osservabilità), si può affermare che tale dimensione è la minima.

b) Per dimostrare che due arbitrarie realizzazioni minime $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ e $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$ di una stessa matrice $\mathbf{W}$ sono necessariamente legate da una relazione del tipo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \, \hat{\mathbf{A}} \, \mathbf{T}^{-1} \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{T} \, \hat{\mathbf{B}} \quad , \quad \mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} \, \mathbf{T}^{-1} \tag{14}$$

con $\mathbf{T}$ matrice non singolare, si può procedere nel seguente modo. Grazie alla (5), scegliendo $r = s = n$ e tenendo presente che $\mathbf{A} \, \mathbf{P}_n$ è una sottomatrice di $\mathbf{P}_{n+1}$ [cfr. (3)], si ha:

$$\mathbf{Q}_n \, \mathbf{A} \, \mathbf{P}_n = \hat{\mathbf{Q}}_n \, \hat{\mathbf{A}} \, \hat{\mathbf{P}}_n \tag{15}$$

Indicate ora con $\mathbf{Q}_n^*$ e $\mathbf{P}^*$ le matrici trasposte coniugate di $\mathbf{Q}_n$ e $\mathbf{P}_n$, dalla (15) si può ottenere:

$$\mathbf{Q}_n^* \, \mathbf{Q}_n \, \mathbf{A} \, \mathbf{P}_n \, \mathbf{P}_n^* = \mathbf{Q}_n^* \, \hat{\mathbf{Q}}_n \, \hat{\mathbf{A}} \, \hat{\mathbf{P}}_n \, \mathbf{P}_n^* \tag{16}$$

La matrice $\mathbf{Q}_n^* \, \mathbf{Q}_n$ è non singolare per la indipendenza lineare delle colonne di $\mathbf{Q}_n$ (proprietà di osservabilità), così pure $\mathbf{P}_n \, \mathbf{P}_n^*$ per la indipendenza lineare delle righe di $\mathbf{P}_n$ (proprietà di raggiungibilità). Si può porre allora:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{Q}_n^* \, \mathbf{Q}_n)^{-1} \, \mathbf{Q}_n^* \, \hat{\mathbf{Q}}_n \, \hat{\mathbf{A}} \, \hat{\mathbf{P}}_n \, \mathbf{P}_n^* (\mathbf{P}_n \, \mathbf{P}_n^*)^{-1} \tag{17}$$

La matrice che premoltiplica $\hat{\mathbf{A}}$ a secondo membro si può indicare con:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{Q}_n^* \, \mathbf{Q}_n)^{-1} \, \mathbf{Q}_n^* \, \hat{\mathbf{Q}}_n \tag{18}$$

Tenendo poi conto che:

$$\mathbf{Q}_n \, \mathbf{P}_n = \hat{\mathbf{Q}}_n \, \hat{\mathbf{P}}_n \tag{19}$$

è possibile provare che [con operazioni analoghe a quelle usate per pervenire alla (17)]:

$$\hat{\mathbf{P}}_n \, \mathbf{P}_n^* (\mathbf{P}_n \, \mathbf{P}_n^*)^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \tag{20}$$

Per la (18) e la (20), la (17) dà:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \, \hat{\mathbf{A}} \, \mathbf{T}^{-1} \tag{21}$$

e cioè la prima della (14).

Per dedurre la seconda e la terza si possono ripetere considerazioni analoghe partendo questa volta dalle relazioni:

$$\mathbf{Q}_n \mathbf{P}_1 = \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{P}}_1 \tag{22}$$

e, rispettivamente:

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{P}_n = \hat{\mathbf{Q}}_1 \hat{\mathbf{P}}_n \tag{23}$$

Basta tenere presente che $\mathbf{P}_1 = \mathbf{B}$, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{P}}_1 = \hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{Q}}_1 = \hat{\mathbf{C}}$.

A.IV.2 - Sull'associazione dello stato ad una matrice di funzioni di trasferimento.

Sia nella prova della condizione di realizzabilità sia nel paragrafo IV.6 l'associazione di una realizzazione ad una matrice di funzioni razionali strettamente proprie di variabile complessa è stata effettuata limitandosi a verificare analiticamente che le terne di matrici (IV.50) e (IV.56) soddisfano dalla relazione:

$$\mathbf{C}\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} = \mathbf{W}(s) \tag{24}$$

È molto diffuso, a proposito di questo problema, un procedimento che consente di pervenire alle (IV.50) o (IV.56) in una maniera che sottolinea e chiarisce l'interpretazione costruttiva del processo di realizzazione. Si ritiene perciò utile darne qui un breve cenno.

Si consideri l'assegnata matrice $\mathbf{W}(s)$ come una matrice di funzioni di trasferimento di un sistema dinamico. Indicate con $\mathbf{u}(s)$ ed $\mathbf{y}(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni di ingresso ed uscita, tenuto conto dell'espressione (IV.49) per $\mathbf{W}(s)$, si può scrivere:

$$\mathbf{y}(s) = \frac{\mathbf{B}_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + \mathbf{B}_1\, s + \mathbf{B}_0}{s^m + a_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}\, \mathbf{u}(s) \tag{25}$$

per il regime forzato a partire dallo stato iniziale **0**. Si supponga ora di disporre di organi del tipo di quelli considerati a pag.43 e, più precisamente, per il caso che si sta esaminando (sistemi stazionari), di:

- moltiplicatori di una grandezza vettoriale, funzione del tempo, per una matrice ad elementi costanti;

- sommatori di due grandezze vettoriali funzioni del tempo;
- integratori di una grandezza vettoriale funzione del tempo.

Questi organi si indicheranno come in fig.II.3, omettendo, per brevità, l'indicazione della condizione iniziale sul blocco integratore. Inoltre, poichè si opera su funzioni di s, il simbolo di integrazione è sostituito con $(1/s)$.

Si osservi ora che la (25) è equivalente alle seguenti due relazioni:

$$\mathbf{i}(s) = \frac{1}{s^m + a_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}\, \mathbf{u}(s) \tag{26}$$

$$\mathbf{y}(s) = (\mathbf{B}_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + \mathbf{B}_1\, s + \mathbf{B}_0)\, \mathbf{i}(s) \tag{27}$$

dove $\mathbf{i}(s)$ è una grandezza ausiliaria a p componenti. La (26) può essere anche riscritta nella forma:

$$s^m\, \mathbf{i}(s) = -\,a_{m-1}\, s^{m-1}\, \mathbf{i}(s) - \ldots - a_1\, s\, \mathbf{i}(s) - a_0\, \mathbf{i}(s) + \mathbf{u}(s) \tag{28}$$

alla quale corrisponde lo schema realizzativo di fig.1.

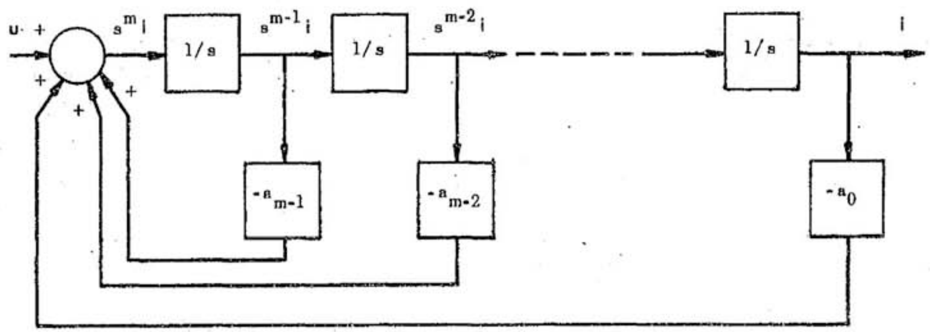

Fig.1

La verifica di tale corrispondenza è immediata in quanto il sommatore stabilisce il vincolo della equazione (28) e gli altri blocchi assicurano la consistenza tra le varie grandezze. All'uscita dei blocchi integratori figurano rispettivamente le grandezze $s^{m-1}\, \mathbf{i}(s), \ldots, s\, \mathbf{i}(s), \mathbf{i}(s)$ e cioè le grandezze la cui combinazione lineare fornisce il secondo membro della (27). Pertanto la $\mathbf{y}(s)$ può essere ottenuta completando lo schema di fig.1 al modo indicato in fig.2.

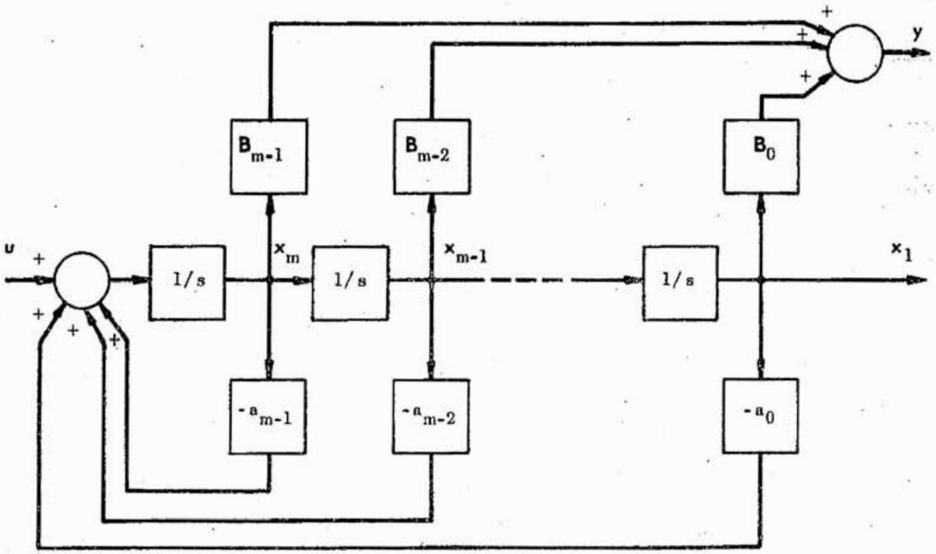

Fig.2

È ora possibile associare, allo schema così dedotto, un sistema di equazioni differenziali del primo ordine; si ha infatti, indicando - da destra verso sinistra - con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ le uscite dei blocchi integratori (si osservi che ciascuna di esse è un vettore a p componenti):

$$
(29)\qquad
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)\\
&\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{x}_3(t)\\
&\dots\dots\dots\\
&\dot{\mathbf{x}}_m(t) = -a_0\,\mathbf{x}_1(t) - a_1\,\mathbf{x}_2(t) - \dots - a_{m-1}\,\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{u}(t)\\
&\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}_0\,\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1\,\mathbf{x}_2(t) + \dots + \mathbf{B}_{m-1}\,\mathbf{x}_m(t)
\end{aligned}
$$

Definendo il vettore (a mp componenti):

$$
(30)\qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x} \end{pmatrix}
$$

si constata immediatamente che le (29) hanno la struttura:

$$
(31)\qquad
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)\\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)
\end{aligned}
$$

e le matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, la forma (IV.50).

Si è così mostrato che, costruendo uno schema realizzativo per il sistema dinamico il cui legame ingresso-uscita è descritto dalla (25) ed assumendo come variabili di stato le variabili in uscita ai blocchi integratori, è possibile associare equazioni ingresso-stato-uscita e, quindi, una realizzazione della matrice $\mathbf{W}(s)$.

Un altro modo di associare uno schema realizzativo alla (25) si basa sulla considerazione della relazione:

$$
(32)\qquad
\begin{aligned}
&s^m\,\mathbf{y}(s) + a_{m-1}\,s^{m-1}\,\mathbf{y}(s) + \dots + a_1\,s\,\mathbf{y}(s) + a_0\,\mathbf{y}(s) =\\
&\quad = \mathbf{B}_{m-1}\,s^{m-1}\,\mathbf{u}(s) + \dots + \mathbf{B}_1\,s\,\mathbf{u}(s) + \mathbf{B}_0\,\mathbf{u}(s)
\end{aligned}
$$

che da essa si deduce moltiplicando ambo i membri per il denominatore di $\mathbf{W}(s)$.

Essa può essere riscritta nella forma:

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{y}(s) = {}&\frac{1}{s}(-a_0\,\mathbf{y}(s) + \mathbf{B}_0\,\mathbf{u}(s)) + \frac{1}{s^2}\,(-a_1\,\mathbf{y}(s) + \mathbf{B}_1\,\mathbf{u}(s)) + \dots\\
&\dots + \frac{1}{s^m}\,(-a_{m-1}\,\mathbf{y}(s) + \mathbf{B}_{m-1}\,\mathbf{u}(s))
\end{aligned}
$$

alla quale corrisponde lo schema realizzativo di fig.3.

Anche in questo caso la verifica della corrispondenza è immediata. La variabile in uscita dal primo blocco integratore (da sinistra) coincide con il primo addendo a secondo membro nella (33); quella in uscita dal secondo blocco integratore con la somma dei primi due addendi nella (33); ecc. È ancora possibile associare a questo schema un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, indicando con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ le uscite dei blocchi integratori (questa volta vettori a q componenti) da sinistra verso destra. Si ha quindi:

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}}_1(t) = -a_0\,\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_0\,\mathbf{u}(t)\\
&\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{x}_1(t) - a_1\,\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_1\,\mathbf{u}(t)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{x}_{m-1}(t) - a_{m-1}\,\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_{m-1}\,\mathbf{u}(t)\\
&\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_m(t)
\end{aligned}
$$

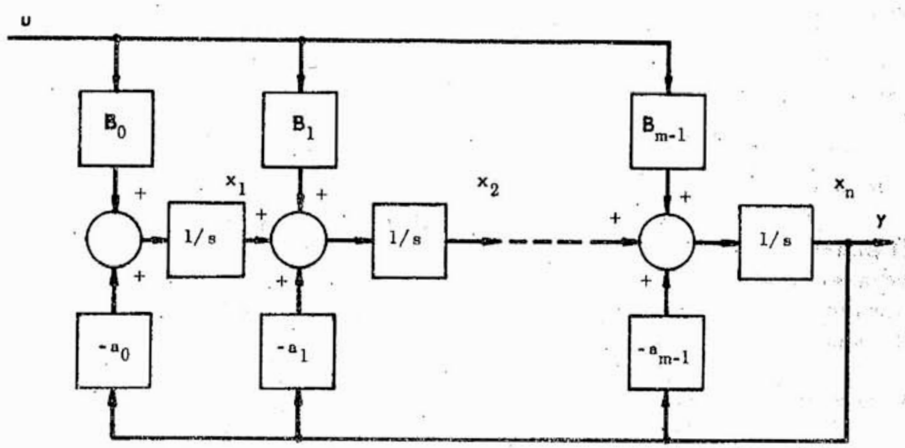

Fig. 3

Definendo ora il vettore (a mq componenti):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{pmatrix} \tag{35}$$

si ottengono delle equazioni della forma (31) con **A**, **B**, **C**, date dalle (IV.56).

*

CAPITOLO V

ELEMENTI DI TEORIA DELLA STABILITÀ
(con riferimento ai sistemi lineari stazionari)

V.1 - Premessa.

I capitoli precedenti di queste dispense sono stati dedicati prevalentemente all'analisi dei diversi modelli matematici che si possono adottare per descrivere un sistema e dei metodi che consentono il passaggio dall'uno all'altro di essi. Una particolare attenzione è stata dedicata all'analisi delle condizioni sotto le quali determinati modelli sono equivalenti. Va sottolineato che nell'esposizione dei suddetti argomenti, in ragione dei limiti posti a queste dispense e chiariti nell'introduzione, pur ispirandosi ad una impostazione di tipo generale, si è perseguito come scopo principale quello di inquadrare e giustificare i metodi di rappresentazione dei sistemi utilizzati nella teoria elementare dei Controlli Automatici.

Questa esigenza condizionerà anche la trattazione dei problemi di stabilità, che verrà svolta in questo capitolo. Questi problemi sono fondamentali nella teoria dei sistemi (cfr. par.I.8) e la teoria relativa può essere sviluppata a livello piuttosto generale. Tuttavia, avendo come obiettivo la presentazione di quei risultati che servono ad inquadrare correttamente i problemi di stabilità che si pongono nella teoria elementare dei Controlli Automatici, ci si limiterà qui a fornire soltanto le nozioni relative alla classe dei sistemi lineari stazionari.

In particolare, si introdurranno le *definizioni* di stato di equilibrio, di stabilità e di stabilità asintotica; si mostrerà anche come, per i sistemi lineari stazionari, a tali concetti si connette strettamente quello di «stabilità interna» di un sistema. Parallelamente si introdurrà anche una definizione di «stabilità esterna». Si daranno poi le *con-*