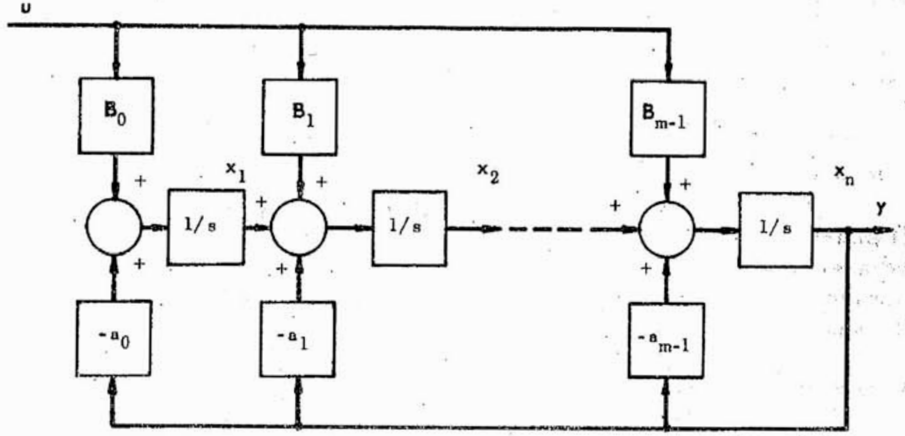

Fig. 3

Definendo ora il vettore (a mq componenti):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix} \tag{35}$$

si ottengono delle equazioni della forma (31) con $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, date dalle (IV.56).

*

CAPITOLO V

ELEMENTI DI TEORIA DELLA STABILITÀ
(con riferimento ai sistemi lineari stazionari)

V.1 - Premessa.

I capitoli precedenti di queste dispense sono stati dedicati prevalentemente all'analisi dei diversi modelli matematici che si possono adottare per descrivere un sistema e dei metodi che consentono il passaggio dall'uno all'altro di essi. Una particolare attenzione è stata dedicata all'analisi delle condizioni sotto le quali determinati modelli sono equivalenti. Va sottolineato che nell'esposizione dei suddetti argomenti, in ragione dei limiti posti a queste dispense e chiariti nell'introduzione, pur ispirandosi ad una impostazione di tipo generale, si è perseguito come scopo principale quello di inquadrare e giustificare i metodi di rappresentazione dei sistemi utilizzati nella teoria elementare dei Controlli Automatici.

Questa esigenza condizionerà anche la trattazione dei problemi di stabilità, che verrà svolta in questo capitolo. Questi problemi sono fondamentali nella teoria dei sistemi (cfr. par.I.8) e la teoria relativa può essere sviluppata a livello piuttosto generale. Tuttavia, avendo come obiettivo la presentazione di quei risultati che servono ad inquadrare correttamente i problemi di stabilità che si pongono nella teoria elementare dei Controlli Automatici, ci si limiterà qui a fornire soltanto le nozioni relative alla classe dei sistemi lineari stazionari.

In particolare, si introdurranno le *definizioni* di stato di equilibrio, di stabilità e di stabilità asintotica; si mostrerà anche come, per i sistemi lineari stazionari, a tali concetti si connette strettamente quello di «stabilità interna» di un sistema. Parallelamente si introdurrà anche una definizione di «stabilità esterna». Si daranno poi le *con-*

dizioni necessarie e sufficienti, sulle funzioni che caratterizzano il modello del sistema, affinchè questo abbia una prefissata proprietà di stabilità. Verrà infine considerato il problema dei legami tra i vari tipi di stabilità introdotti.

Si vuole sottolineare che, dal punto di vista applicativo, è di fondamentale importanza fornire, accanto alle definizioni e alle condizioni, anche *criteri* che consentano di verificare se le suddette condizioni di stabilità siano soddisfatte o meno per un assegnato sistema. Tali criteri non vengono trattati in questo capitolo, dove ci si limita (cfr. paragrafo V.8) a dare cenni di inquadramento ed opportuni riferimenti.

V.2 - *Stati di equilibrio.*

Non è conveniente dare le definizioni relative alla teoria della stabilità riferendosi direttamente alla classe dei sistemi lineari stazionari, se si vogliono mettere in luce alcune proprietà essenziali di cui tale classe particolare di sistemi gode dal punto di vista dello studio della stabilità. A tal fine è importante rilasciare almeno l'ipotesi di linearità; per semplicità di trattazione è conveniente viceversa mantenere l'ipotesi che i sistemi siano stazionari.

Mantenendo anche in questo capitolo l'ipotesi, fin qui adottata, che i sistemi in questione abbiano uno spazio di stato a dimensione finita (ordine finito) e siano differenziali, come descrizione del sistema si può adottare o la funzione di transizione dello stato (II.1) o l'equazione differenziale (II.38), cui tale funzione soddisfa. Tenendo presente le implicazioni dell'ipotesi di stazionarietà tali relazioni possono essere riscritte nella forma:

$$(V.1) \qquad \mathbf{x}(t) = \varphi(t - t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}|_{(t_0,t]})$$

e, rispettivamente:

$$(V.2) \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\,[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Ciò premesso si può passare a definire i cosidetti *stati* (o punti) *di equilibrio*, la cui considerazione è il punto di partenza della teoria della stabilità. In termini informali uno stato $\mathbf{x}_e$ si dice di equilibrio se, nell'evoluzione libera avente origine da tale stato, lo stato del sistema si mantiene costantemente pari ad $\mathbf{x}_e$. In termini formali[1], si

(1) - Si assume come istante iniziale $t_0 = 0$, senza perdita di generalità in quanto i sistemi considerati sono stazionari.

tratta di imporre, nella (V.1) che, se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_e$ ed $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \geq 0$, risulti $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$ per ogni $t \geq 0$; cioè, in formula:

$$(V.3) \qquad \mathbf{x}_e = \varphi(t, \mathbf{x}_e, \mathbf{0}) \qquad \forall t \geq 0$$

Similmente, imponendo tale condizione nella (V.2) (tenendo quindi presente che $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$ per ogni $t \geq 0$ implica $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$) si ha:

$$(V.4) \qquad \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{0})$$

I punti di equilibrio si ottengono dunque come soluzioni o della (V.3) o della (V.4). Esula dai limiti di queste note considerare in generale il problema dell'esistenza di tali soluzioni e, in caso affermativo, quello dello studio della natura dell'insieme da esse definito. Si esaminerà in dettaglio solo il caso dei sistemi lineari stazionari; in esso le (V.3) e (V.4) diventano:

$$(V.5) \qquad \mathbf{x}_e = \Phi(t)\,\mathbf{x}_e \qquad \forall t \geq 0$$

$$(V.6) \qquad \mathbf{0} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_e$$

In particolare quest'ultima è una equazione lineare omogenea e quindi ammette sempre la soluzione $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. È noto inoltre dalla teoria delle equazioni lineari omogenee che tale soluzione è unica se e solo se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare; negli altri casi esistono infinite soluzioni che costituiscono un sottospazio lineare dello spazio di stato[1]. In altri termini *in un sistema lineare stazionario o vi è un solo stato di equilibrio, coincidente con l'origine* ($\mathbf{A}$ *non singolare*) *o ve ne sono infiniti, costituenti un sottospazio lineare* ($\mathbf{A}$ *singolare*).

Ad esempio, considerando il sistema associato al circuito di figura III.7, si constata che esiste un solo stato di equilibrio caratterizzato da valori nulli della corrente i e delle tensioni v_1, v_2; la matrice $\mathbf{A}$ della (III.55) è infatti non singolare. Considerando invece il sistema associato al motore di fig.III.5, si constata che esistono infiniti stati di equilibrio, caratterizzati da valori arbitrari della posizione angolare θ e da valori nulli della velocità Ω e della corrente i_e. Tali stati di equilibrio si determinano scrivendo l'equazione (V.6) per la matrice $\mathbf{A}$ data dalla (III.49).

(1) - Basta osservare che, se $\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ ed $\mathbf{A}\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ (con $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$) risulta anche, per qualsiasi valore delle costanti c_1 e c_2, $\mathbf{A}(c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$.

V.3 - Stabilità di uno stato di equilibrio.

Uno stato di equilibrio $\mathbf{x}_e$ si dice *stabile*, se, comunque si sceglie un numero $\epsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$, eventualmente dipendente da ϵ, tale che, se la distanza tra lo stato iniziale $\mathbf{x}_0$ e lo stato di equilibrio $\mathbf{x}_e$ è minore di δ, allora, ad ogni istante t (successivo all'istante iniziale) la distanza tra lo stato assunto in evoluzione libera e lo stato di equilibrio $\mathbf{x}_e$ risulta inferiore ad ϵ.

Come è noto, la distanza tra due punti $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ di uno spazio lineare normato può essere espressa mediante la normale del vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, che sarà indicata con $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ (cfr. Appendice A.V.1). In tal caso la precedente definizione può essere formalizzata nel modo seguente:

$$\text{(V.7)} \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 \ : \ \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta_\epsilon \implies$$

$$\implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \epsilon \quad , \quad \forall t \geq 0$$

se con $\mathbf{x}(t)$ si indica la risposta dello stato in evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ (1).

Per avere una interpretazione geometrica della definizione ora data, si può considerare la fig. V.1, che è relativa ad un sistema del secondo ordine ed in cui è riportato anche l'asse dei tempi. In essa si ipotizza che lo stato $\mathbf{x}_e$ sia uno stato di equilibrio; si dirà che esso è stabile, se, comunque si fissa il raggio ϵ del cilindro C, esiste un cerchio di raggio δ_ϵ tale che, per ogni stato iniziale ad esso interno, la risposta in evoluzione libera si mantiene all'interno del cilindro C. Si sottolinea il fatto che questa situazione deve verificarsi per tutti i possibili valori del raggio del cilindro; in altri termini, se per uno solo di tali valori ciò non si verifica, il punto di equilibrio non è stabile.

(1) - È importante osservare che il punto di equilibrio e, di conseguenza, la relativa stabilità sono definiti con riferimento ad una particolare rappresentazione del sistema in esame. Se in luogo di questa si considera quella corrispondente ad un'arbitraria trasformazione di coordinate nello spazio di stato, del tipo:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{x}(t)$$

(con $\mathbf{T}$ costante e non singolare), al generico punto di equilibrio $\mathbf{x}_e$ corrisponde il punto:

$$\mathbf{z}_e = \mathbf{T}\,\mathbf{z}_e$$

Si verifica però facilmente che la stabilità di $\mathbf{x}_e$ implica ed è implicata da quella di $\mathbf{z}_e$ (il lettore potrà provarlo direttamente partendo dalla (V.7) e tenendo conto della relazione (16) dell'Appendice A.V.1).

In questo senso la stabilità di un certo punto di equilibrio può essere considerata invariante su tutte le suddette rappresentazioni del sistema.

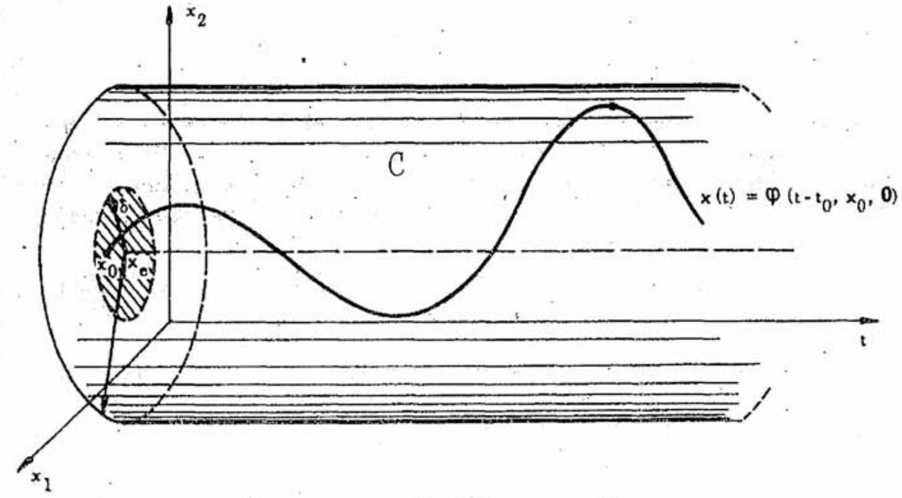

Fig. V.1

La figura evidenza anche il concetto qualitativo che sta alla base della definizione formale, e cioè il requisito che l'intera traiettoria in evoluzione libera si mantenga vicina quanto si vuole allo stato di equilibrio, se lo scostamento dello stato iniziale da quest'ultimo viene opportunamente limitato.

Prima di passare a considerare alcuni esempi, si ritiene utile esplicitare alcune implicazioni della definizione (V.7) per il caso dei *sistemi lineari stazionari*. In particolare, in tali sistemi, *se esiste più di un punto di equilibrio la stabilità di uno qualsiasi di essi implica ed è implicata da quella di un qualsiasi altro*. Allo scopo è sufficiente, ovviamente, provare che la stabilità di un qualsiasi punto $\mathbf{x}_e$ implica ed è implicata da quella dell'origine $\mathbf{0}$ dello spazio di stato.

Si supponga la (V.7) verificata e si definisca la variabile:

$$\text{(V.8)} \qquad \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$$

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$\text{(V.9)} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$\mathbf{z}(t)$ soddisfa la stessa equazione differenziale:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{z}(t) \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e = \mathbf{z}_0 \tag{V.10}$$

Tenendo conto di tali posizioni, la (V.7) si può riscrivere nella forma:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 \ :\ \|\mathbf{z}_0\| < \delta_\epsilon \Longrightarrow \|\mathbf{z}(t)\| < \epsilon \qquad \forall t \geq 0 \tag{V.11}$$

Questa si può interpretare come condizione di stabilità relativa all'origine $\mathbf{0}$ dello spazio di stato del sistema descritto dalla (V.10). Essendo questo sistema coincidente col sistema (V.9), tale condizione si può anche interpretare come condizione di stabilità dell'origine dello spazio di stato nel sistema originario.

Utilizzando lo stesso cambiamento di variabile e partendo questa volta dalla (V.11) è possibile provare, allo stesso modo, l'implicazione inversa.

Un'ultima precisazione riguarda la possibilità, nella classe dei sistemi lineari, di indebolire la (V.7). Si può infatti mostrare che questa è equivalente alla condizione più debole:

$$\exists\, \overline{\epsilon} > 0,\ \exists\, \overline{\delta} > 0 \ :\ \|\mathbf{x}_0\| < \overline{\delta} \Longrightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \overline{\epsilon} \qquad \forall t \geq 0 \,. \tag{V.12}$$

In questa, grazie al risultato precedente, si fa riferimento all'origine $\mathbf{0}$ dello spazio di stato anzichè al particolare punto di equilibrio $\mathbf{x}_e$ e si considera l'esistenza di una sola coppia di valori $(\overline{\epsilon}, \overline{\delta})$ in luogo delle infinite coppie $(\epsilon, \delta_\epsilon)$ previste nella (V.7). Per provare l'equivalenza della (V.12) alla (V.7) (riferita a $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$), si ammetta che la prima di esse sia soddisfatta e si definisca una nuova variabile:

$$\mathbf{z}(t) = \alpha\, \mathbf{x}(t) \qquad (\mathbf{z}_0 = \alpha\, \mathbf{x}_0) \tag{V.13}$$

con α numero reale arbitrario. Sostituendo questa nella (V.12) si ha:

$$\exists\, \overline{\epsilon} > 0,\ \exists\, \overline{\delta} > 0 \ :\ \|\mathbf{z}_0\| < \alpha\,\overline{\delta} \Longrightarrow \|\mathbf{z}(t)\| < \alpha\,\overline{\epsilon} \tag{V.14}$$

e cioè, data l'arbitrarietà di α, la (V.7) con:

$$\delta_\epsilon = \epsilon\,\frac{\overline{\delta}}{\overline{\epsilon}}$$

(avendo posto preliminarmente $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$). Questa nuova espressione è condizione di stabilità per il punto di equilibrio in esame in quanto $\mathbf{z}(t)$ soddisfa all'equazione (V.10). L'implicazione inversa è evidentemente banale.

Si passa ora a considerare alcuni semplici esempi che permettono di illustrare gli aspetti essenziali del concetto di stabilità di uno stato di equilibrio.

Sia dato un sistema descritto da:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{15}$$

che ammette, in base a quanto osservato nel paragrafo precedente, l'origine dello spazio di stato come unico punto di equilibrio. Le traiettorie dello stato in evoluzione libera, a partire da uno stato iniziale arbitrario $\mathbf{x}_0$, possono essere calcolate, ad esempio, servendosi dei risultati dell'analisi modale. Utilizzando le notazioni del paragrafo III.2 si ha:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = j \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = -j \\ &\mathbf{u}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{V.16}$$

e quindi:

$$\mathbf{x}(t) = m \operatorname{sen}(t + \varphi)\, \mathbf{u}_a + m \cos(t + \varphi)\, \mathbf{u}_b \tag{V.17}$$

dove m e φ sono costanti dipendenti dallo stato iniziale. Le traiettorie sono circonferenze concentriche all'origine come quella di fig.V.2.

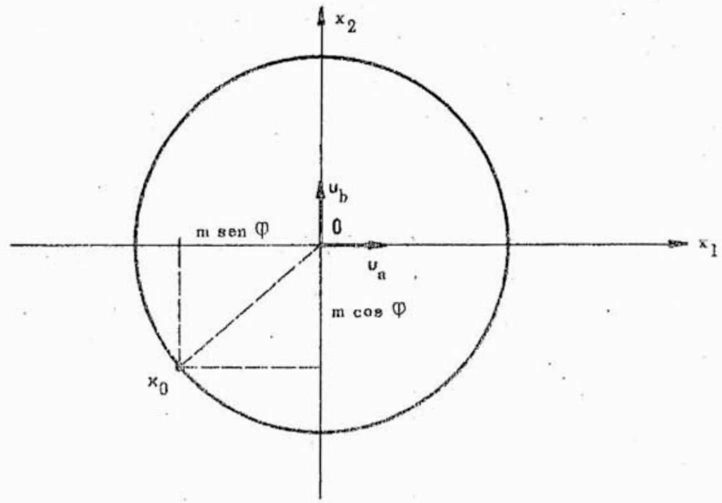

Fig.V.2

È chiaro che l'origine è stabile nel senso della definizione data, in quanto la (V.7) è verificata scegliendo $\delta_\epsilon < \epsilon$.

Sia dato ora un sistema descritto da:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{V.18}$$

che ammette gli infiniti punti di equilibrio:

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} -2a \\ a \end{pmatrix} \qquad a \in R \tag{V.19}$$

Le traiettorie dello stato in evoluzione libera in questo caso sono date da:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 + e^{-t} c_2 \mathbf{u}_2 \tag{V.20}$$

ove:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{V.21}$$

e c_1, c_2 sono costanti dipendenti dallo stato iniziale.

Poichè la componente secondo la direzione di $\mathbf{u}_1$ conserva, ad ogni istante t, il medesimo valore $c_1 \mathbf{u}_1$, mentre quella lungo la direzione di $\mathbf{u}_2$ tende a zero, è immediato rendersi conto che la traiettoria in evoluzione libera coincide con il segmento a tratto pieno indicato in fig.V.3a, dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0$ allo stato finale $c_1 \mathbf{u}_1$ (raggiunto peraltro, in un tempo infinito).

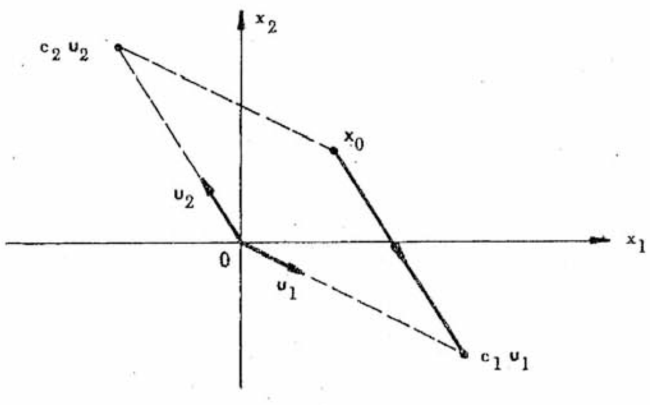

Fig. V.3 a

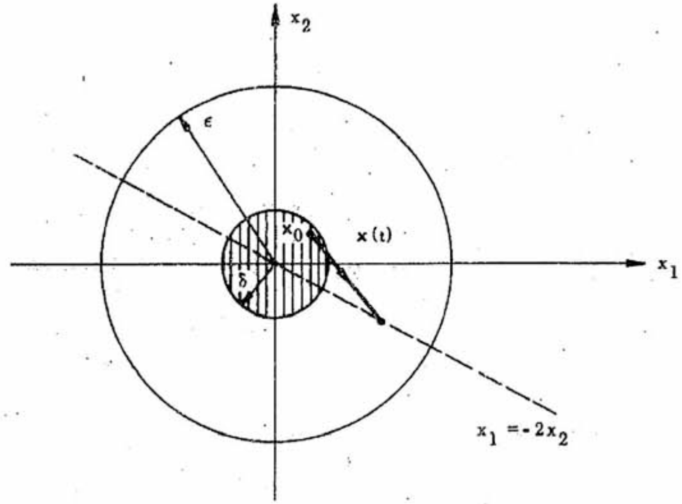

Fig. V.3 b

Poichè si è visto che, nei sistemi lineari, tutti gli stati di equilibrio hanno la stessa proprietà di stabilità, ci si può limitare a considerarne uno solo di essi, in particolare l'origine.

Dall'esame della figura risulta che l'evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ rimane tutta contenuta in un cerchio di raggio ϵ attorno al punto di equilibrio **0** purchè la perturbazione iniziale sia contenuta in un cerchio di raggio δ opportunamente scelto.

Si conclude che l'origine dello spazio di stato e, quindi, tutti gli stati di equilibrio del sistema in esame sono stabili.

Si richiama l'attenzione sul fatto che in entrambi gli esempi le traiettorie aventi origine da $\mathbf{x}_0$ si mantengono limitate come richiesto per la stabilità, ma o non convergono ad alcuno stato o convergono ad uno stato finale diverso da quello di equilibrio considerato.

V.4 - Stabilità asintotica di uno stato di equilibrio.

Accanto alla definizione di stabilità introdotta nel paragrafo precedente è importante considerarne una più restrittiva. Più precisamente si introduce il concetto di *stabilità asintotica* di uno stato di equilibrio $\mathbf{x}_e$ imponendo che:

a) esso sia stabile;

b) esista un numero δ_a tale che:

$$\text{(V.22)} \qquad \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta_a \implies \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0$$

essendo $\mathbf{x}(t)$ la risposta in evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

In altri termini, in questo tipo di stabilità si richiede non solo che la traiettoria si mantenga vicina alla posizione di equilibrio ma che la distanza da essa si riduca a zero per t tendente all'infinito.

Si noti che la stabilità asintotica è un concetto di tipo locale; in altre parole affinchè si abbia convergenza verso lo stato di equilibrio occorre che lo stato iniziale non si discosti da esso più di un opportuno valore. È per questo che si usa precisare che lo stato di equilibrio è *localmente* asintoticamente stabile (o stabile in piccolo). Se invece accade che per qualunque stato iniziale $\mathbf{x}_0$ l'evoluzione libera converge verso lo stato di equilibrio, quest'ultimo si dice *globalmente* asintoticamente stabile (o stabile in grande); in tal caso, in luogo della (V.22) deve sussistere la:

$$\text{(V.23)} \qquad \forall \mathbf{x}_0 \in X \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0$$

Nel caso dei *sistemi lineari stazionari* si verificano i seguenti fatti:

– *si può avere stabilità asintotica solo per lo stato di equilibrio* $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ *e solo quando quest'ultimo è l'unico stato di equilibrio del sistema;*

– *la stabilità asintotica locale dello stato* $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ *implica la sua stabilità asintotica globale.*

Per quanto riguarda il primo punto, va osservato infatti che, se vi sono più stati di equilibrio (un sottospazio lineare, per quanto detto nel paragrafo V.2), uno qualsiasi di essi $\mathbf{x}_e$ è punto di accumulazione di altri stati di equilibrio. Di conseguenza, comunque piccolo sia δ_a, esiste sempre la possibilità di scegliere $\mathbf{x}_0$ coincidente con un altro stato di equilibrio $\hat{\mathbf{x}}_e \neq \mathbf{x}_e$. Per definizione di punto di equilibrio risulta allora $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}_e$ per ogni $t \geq 0$ e quindi non si ha la convergenza verso $\mathbf{x}_e$. Da ciò emerge che si può avere asintoticità solo quando lo stato di equilibrio è un punto isolato. Nel caso dei sistemi lineari stazionari, come si è visto nel paragrafo V.2, questo avviene solo nel caso in cui l'origine dello spazio di stato è l'unico punto di equilibrio del sistema.

La dimostrazione che la stabilità asintotica locale implica quella globale può essere effettuata con gli stessi argomenti utilizzati nel paragrafo precedente, servendosi in particolare del cambiamento di variabile (V.13).

È infine utile notare che le condizioni (a) e (b), che caratterizzano la stabilità asintotica, non sono indipendenti nel caso dei sistemi lineari stazionari. Si può provare infatti che la condizione (b) implica la (a), nel seguente modo.

L'esistenza del limite previsto dalla condizione (b) corrisponde al fatto che, comunque si fissi un $\eta > 0$, esiste un numero $T > 0$ tale che (si ricordi che $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$):

$$\text{(V.24)} \qquad \|\mathbf{x}_0\| < \delta_a \implies \|\mathbf{x}(t)\| < \eta \quad , \quad \forall t \geq T$$

D'altra parte, sull'intervallo $[0, T]$ la funzione $\mathbf{x}(t)$ è continua e quindi esiste un numero $k > 0$ tale che:

$$\text{(V.25)} \qquad \|\mathbf{x}(t)\| < k \quad , \quad \forall t \in [0, T]$$

Dalle due ultime disuguaglianze supponendo - come è sempre possibile - $k \geq \eta$, consegue che:

$$\text{(V.26)} \qquad \|\mathbf{x}_0\| < \delta_a \implies \|\mathbf{x}(t)\| < k \quad ; \quad \forall t \geq 0$$

Questa è precisamente la condizione di stabilità (a) nella forma prevista dalla (V.12) (con $\bar{\epsilon} = k$, $\bar{\delta} = \delta_a$).

V.5 - La stabilità «interna» dei sistemi lineari.

È conveniente a questo punto riassumere i principali risultati acquisiti per il caso dei sistemi lineari stazionari:

a) o il punto di equilibrio è unico e coincide con l'origine dello spazio; esso allora può essere stabile, o stabile asintoticamente, o instabile;

b) oppure i punti di equilibrio sono infiniti e costituiscono un sottospazio; essi allora possono essere o tutti stabili o tutti instabili (non si può mai avere la stabilità asintotica).

È ovvio che nel primo dei due casi, esistendo un solo punto di equilibrio, si possono attribuire le proprietà di stabilità di quest'ultimo al *sistema*. Tuttavia una tale attribuzione è anche lecita nel secondo caso, in quanto, pur essendovi infiniti punti di equilibrio, il sussistere o meno della proprietà di stabilità è indipendente dal particolare punto di equilibrio considerato.

Nel riferire la stabilità al sistema anzichè ai singoli stati di equilibrio, occorre tener presente che il sistema stesso va considerato *in evoluzione libera* (in quanto i punti di equilibrio e la loro stabilità sono per definizione riferiti a tale tipo di evoluzione). Il sistema si trova dunque nella situazione di ingresso nullo e, per sottolineare questo fatto, si usa parlare di *stabilità interna.*

Le considerazioni precedenti portano, in modo naturale, alle seguenti definizioni: *un sistema lineare stazionario è stabile internamente, asintoticamente stabile internamente, instabile internamente, a seconda che l'origine dello spazio di stato sia stabile, asintoticamente stabile o instabile.*

Si passerà ora a dare delle condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità interna.

Ricordando che la matrice di transizione del sistema $\Phi(t)$ ne descrive il comportamento in evoluzione libera (nello stato) ed indicando con $||\Phi(t)||$ una sua norma (si veda in proposito l'Appendice A.V.1), si può enunciare la seguente condizione: *un sistema lineare stazionario è stabile, internamente, se e solo se esiste una costante* $k > 0$ *tale che*:

$$||\Phi(t)|| < k \qquad \forall t \geq 0 \tag{V.27}$$

Per provare che tale condizione è sufficiente, si osservi che, se vale la (V.27), per ogni evoluzione libera si può scrivere:

$$||\mathbf{x}(t)|| = ||\Phi(t)\,\mathbf{x}_0|| \leq ||\Phi(t)|| \cdot ||\mathbf{x}_0|| < k\,||\mathbf{x}_0|| \tag{V.28}$$

e pertanto, fissato comunque $\epsilon > 0$, se si sceglie $\delta_\epsilon = \epsilon/k$, si può scrivere:

$$||\mathbf{x}_0|| < \delta_\epsilon \Longrightarrow ||\mathbf{x}(t)|| < \epsilon \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{V.29}$$

che corrisponde alla (V.7), con $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$.

Per la prova della necessità, basta tenere presente che se non vale la (V.27), esiste almeno un elemento di $\Phi(t)$, ad esempio quello di posto (i, k), che è illimitato (cfr. Appendice A.V.1). Di conseguenza, scegliendo $\mathbf{x}_0$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x_{0j} &= 0 \qquad j \neq k \\ x_{0k} &= \eta > 0 \end{aligned} \tag{V.30}$$

per quanto piccolo si scelga η la corrispondente risposta in evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ avrà la componente i-esima illimitata, il che è contrario alla condizione (V.7).

In modo simile si può provare che *un sistema lineare stazionario è asintoticamente stabile internamente, se e solo se:*

$$\lim_{t \to \infty} ||\Phi(t)|| = 0 \tag{V.31}$$

Questa condizione garantisce infatti che:

$$\lim_{t \to \infty} ||\mathbf{x}(t)|| = \lim_{t \to \infty} ||\Phi(t)\,\mathbf{x}_0|| = 0 \tag{V.32}$$

e cioè la (V.22) per lo stato $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Ricordando che nei sistemi lineari stazionari questa condizione è la sola condizione di stabilità asintotica per uno stato di equilibrio (cfr. osservazioni alla fine del paragrafo V.4), ne consegue la sufficienza della condizione (V.31).

D'altra parte, se questa non vale, almeno un elemento della funzione $\Phi(t)$ o non ammette limite per $t \to \infty$, o ammette limite diverso da zero. Ripetendo il ragionamento utilizzato per la prova della necessità del precedente risultato si conclude che, in tal caso, la (V.22) non può essere verificata.

Se ora si tiene presente il legame tra la matrice di transizione $\Phi(t)$ e la matrice $\mathbf{A}$ che figura nell'equazione differenziale che descrive il comportamento in evoluzione libera del sistema [cfr. (V.9), ad esempio] si può facilmente stabilire che:

a) *un sistema lineare stazionario è stabile internamente se e solo se tutte le radici semplici del polinomio minimo della matrice* $\mathbf{A}$ *hanno parte reale non positiva e tutte quelle multiple hanno parte reale negativa;*

b) *un sistema lineare è asintoticamente stabile internamente se e solo se tutte le radici del polinomio minimo della matrice* $\mathbf{A}$ *hanno parte reale negativa.*

Si noti che nella condizione (b) non interviene una differenzazione delle radici in semplici e multiple. Pertanto la condizione può essere riferita indifferentemente alle radici del polinomio minimo, a quelle del polinomio caratteristico o agli autovalori di $\mathbf{A}$.

Per verificare la validità di queste asserzioni, basta tenere presente l'espressione (III.112) di $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$, ottenute antitrasformando la (III.110).

V.6 - La stabilità «esterna» nei sistemi lineari.

Accanto al tipo di stabilità presentato nei paragrafi precedenti, basato sulla considerazione della risposta nello stato in evoluzione libera, è usuale introdurne anche uno basato sulla considerazione della risposta nell'uscita *in evoluzione forzata*. Più precisamente, si considera il comportamento in evoluzione forzata corrispondente a stati iniziali arbitrari e ad ingressi limitati e, sostanzialmente, si richiede che, in tale situazione, le corrispondenti risposte in uscita si mantengano anch'esse limitate. Per tale motivo è usuale riferirsi a questo tipo di stabilità con la denominazione «stabilità ingresso-limitato uscita-limitata»; per brevità qui si userà la dizione di *stabilità esterna.*

Più precisamente, si consideri un sistema descritto della funzione di transizione dello stato (V.1) e dalla trasformazione di uscita:

$$y(t) = \eta\,[x(t),\, u(t)] \tag{V.33}$$

Tale sistema si dice *stabile esternamente* se, comunque si sceglie un $M > 0$ e comunque si sceglie il valore x_0 assunto dallo stato all'istante $t = 0$, esiste un numero $N > 0$, eventualmente dipendente da M e da x_0, tale che, se la funzione ingresso è limitata da M per tutti i $t \geq 0$, allora la corrispondente funzione di uscita risulta limitata da N per tutti i $t \geq 0$, quale che sia lo stato iniziale x_0. In formule, dunque:

$$\forall M > 0,\ \forall x_0 \in X,\ \exists N_{M,x_0} > 0 \ : \tag{V.34}$$

$$\|u(t)\| < M,\ \forall t \geq 0 \Longrightarrow \|y(t)\| < N_{M,x_0},\quad \forall t \geq 0,\ \forall x_0 \in X$$

dove con $y(t)$ si è indicata la risposta in uscita corrispondente all'ingresso u ed allo stato iniziale $x(0) = x_0$.

Una proprietà di stabilità esterna più debole di quella definita sopra, si ottiene se nella relazione precedente si suppone che il valore dello stato iniziale sia fissato. In questo ambito è particolarmente interessante riferirsi alla situazione in cui $x_0 = \mathbf{0}$; si parla in tal caso di *stabilità esterna, nello stato zero*. In formule, la condizione (V.34) diviene:

$$\forall M > 0,\ \exists N_M > 0 \ : \tag{V.35}$$

$$\|u(t)\| < M,\ \forall t \geq 0 \Rightarrow \|y(t)\| < M_M \ ,\quad \forall t \geq 0$$

se con $y(t)$ si indica questa volta la risposta in uscita corrispondente all'ingresso u ed allo stato iniziale $x(0) = \mathbf{0}$.

Si passerà ora a dare condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità esterna di un sistema lineare stazionario. Indicata con:

$$y(t) = \Psi(t)\, x_0 + \int_0^t W(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \tag{V.36}$$

la risposta in uscita di tale sistema si può dimostrare che *un sistema lineare stazionario è stabile esternamente se e solo se:*

a) *esiste una costante* $k_1 > 0$ *tale che:*

$$\|\Psi(t)\| < k_1 \qquad \forall t \geq 0 \tag{V.37}$$

b) *esiste una costante* $k_2 > 0$ *tale che:*

$$\int_0^t \|W(\tau)\|\, d\tau < k_2 \qquad \forall t \geq 0 \tag{V.38}$$

Per provare che tale condizione è sufficiente, si osservi che, dalla (V.36) si ha, per ogni $t \geq 0$,

$$\|y(t)\| \leq \|\Psi(t)\, x_0\| + \left\| \int_0^t W(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right\| \leq \tag{V.39}$$

$$\leq \|\Psi(t)\| \cdot \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\| \cdot \|u(\tau)\|\, d\tau$$

Se ora risulta:

$$\|u(t)\| < M \qquad \forall t \geq 0 \tag{V.40}$$

dalle (V.37) e (V.38), si ha:

$$\|y(t)\| \leq k_1 \|x_0\| + k_2 M \tag{V.41}$$

e cioè la condizione espressa dalla (V.34), con $N_{M,x_0} = k_1 \|x_0\| + k_2 M$.

Per la prova della necessità della (V.37) si osservi che, se essa non è valida, esiste almeno un elemento di $\Psi(t)$, ad esempio quello di posto (i, k), che è illimitato. Di conseguenza, scegliendo $\mathbf{x}_0$ come nelle (V.30) ed $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, $\forall t \geq 0$, si ottiene una uscita illimitata.

Per la prova della necessità della (V.38) si osservi che, se essa non è valida, comunque si fissi un numero $k > 0$ esiste un T (dipendente da k) tale che:

$$\text{(V.42)} \qquad \int_0^T ||\mathbf{W}(\tau)|| d\tau > k$$

Scegliendo come norma di $\mathbf{W}(\tau)$ l'espressione:

$$\text{(V.43)} \qquad ||\mathbf{W}(\tau)|| = \max_i \sum_{j=1}^{p} |w_{ij}(\tau)|$$

risulta:

$$\text{(V.44)} \qquad \int_0^T \max_i \sum_{j=1}^{p} |w_{ij}(\tau)| d\tau > k$$

Di conseguenza, per almeno un valore di i, sia esso h, si ha:

$$\text{(V.45)} \qquad \int_0^T \sum_{j=1}^{p} |w_{hj}(\tau)| d\tau > k$$

Si consideri ora un ingresso $\mathbf{u}$ tale che sia(1):

$$\text{(V.46)} \qquad \begin{aligned} u_j(\tau) &= \text{sgn}\, w_{hj}(T-\tau) \quad , \quad 0 \leq \tau \leq T \\ u_j(\tau) &= 0 \quad , \quad \tau \geq T \end{aligned}$$

La componente h-esima della risposta (V.36) a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, assume, all'istante T, il valore:

$$\text{(V.47)} \qquad y_h(T) = \int_0^T \sum_{j=1}^{p} w_{hj}(T-\tau)\, u_j(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^T \sum_{j=1}^{p} |w_{hj}(T-\tau)| d\tau = \int_0^T \sum_{j=1}^{p} |w_{hj}(\tau)| d\tau$$

(1) - La funzione sgn x è definita nel modo seguente:

$\text{sgn}\, x = -1, \ x < 0 \quad ; \quad \text{sgn}\, x = 0 \quad x = 0 \quad ; \quad \text{sgn}\, x = 1 \quad x > 0$.

Per la (V.45) si ha allora:

$$\text{(V.48)} \qquad y_h(T) > k$$

Essendo k arbitrario, tale disuguaglianza prova che $\mathbf{y}$ non è limitata su $[0, \infty)$. Poichè l'ingresso cui essa corrisponde soddisfa invece la limitazione:

$$\text{(V.49)} \qquad ||u(\tau)|| \leq 1 \qquad \forall \tau \geq 0$$

risulta provato che, se la (V.38) non è soddisfatta, il sistema non è stabile esternamente.

Da questa stessa prova si deduce immediatamente che *un sistema lineare stazionario è stabile esternamente nello stato zero se e solo se vale la condizione (b).*

Tenendo ora presente il legame tra le matrici $\boldsymbol{\psi}(t)$, $\mathbf{W}(t)$ e le matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ che caratterizzano un modello differenziale del sistema in esame [si vedano, ad esempio, le (III.13), (III.14)] è possibile dare una diversa caratterizzazione delle condizioni (a) e (b) di stabilità esterna. Infatti, in tal caso, come si è visto (cfr. pag.92) le trasformate di Laplace delle funzioni $\boldsymbol{\psi}(t)$ e $\mathbf{w}(t)$ sono funzioni razionali proprie di s. È allora facile constatare che *un sistema lineare stazionario è stabile esternamente se e solo se:*

a) *tutti i poli semplici di $\boldsymbol{\Psi}(s)$ hanno parte reale non positiva e tutti quelli multipli hanno parte reale negativa;*

b) *tutti i poli di $\mathbf{W}(s)$ hanno parte reale negativa.*

La condizione (b) è da sola necessaria e sufficiente per la stabilità esterna nello stato zero.

La verifica di queste condizioni è una conseguenza diretta delle espressioni delle antitrasformate delle funzioni razionali.

Per la stabilità esterna nello stato zero è possibile dare anche un'ulteriore caratterizzazione, accanto a quelle espresse dalle due condizioni (b) di cui sopra. Si può infatti facilmente provare che esse sono entrambe equivalenti alla condizione che il limite di $||\mathbf{W}(t)||$ per $t \to \infty$ sia 0. Per la verifica basta riferirsi, ad esempio, alla condizione sui poli di $\mathbf{W}(s)$. Se $\mathbf{W}(s)$ ha solo poli con parte reale negativa, ne consegue che $\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{W}(t)|| = 0$; se quest'ultima relazione è vera, viceversa, $\mathbf{W}(s)$, che è una funzione razionale, ha tutti i poli con parte reale negativa. Riassumendo queste varie osservazioni, per comodità del lettore, si può affermare che *un sistema lineare stazionario è stabile esternamente nello stato zero se e solo se una qualunque delle tre seguenti condizioni è soddisfatta:*

– *esiste una costante* $k > 0$ *tale che:*

(V.38') $$\int_0^t ||\mathbf{W}(\tau)||\, d\tau < k \qquad \forall t \geq 0$$

– *tutti i poli della matrice delle funzioni di trasferimento hanno parte reale negativa;*

– *la matrice delle risposte impulsive ammette il limite:*

(V.50) $$\lim_{t \to \infty} ||\mathbf{W}(t)|| = 0$$

Prima di concludere il paragrafo è interessante analizzare *i legami che sussistono tra i due tipi di stabilità esterna* sopra introdotti. Discende direttamente dalle definizioni che un sistema stabile esternamente è anche stabile esternamente nello stato zero. In generale non è vero il viceversa; questo tuttavia si verifica se il sistema in questione è raggiungibile, come si può constatare con la seguente dimostrazione per assurdo.

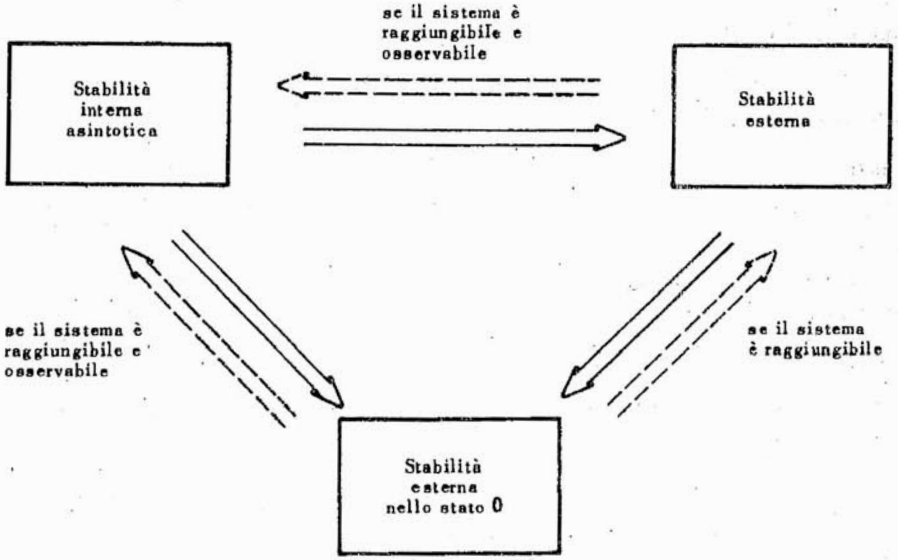

Fig. V.4

Si supponga che un sistema sia raggiungibile, stabile esternamente nello stato zero e *non* stabile esternamente. Per un tale sistema verificata la condizione (b) [cfr. (V.38)], ma non la (a) [cfr. (V.37)], cioè almeno un elemento della matrice $\Psi(t)$, quello di posto (i, k) è illimitato. Di conseguenza la risposta in uscita in uscita in evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0$ scelto come nelle (V.30) è illimitata. Essendo però, per ipotesi, tale stato raggiungibile, esistono un istante finito $T > 0$ ed un ingresso limitato $\mathbf{u}^*$ che trasferisce l'origine $\mathbf{0}$ dello spazio di stato in $\mathbf{x}_0$ all'istante T. Se si considera quindi il particolare ingresso limitato:

(V.51) $$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}^*(t)\,, & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{0}\,, & T < t \end{cases}$$

la corrispondente risposta in uscita a partire dallo stato $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ coincide, per $t \geq T$, con quella in evoluzione libera a partire dallo stato $\mathbf{x}_0$ all'istante T ed è perciò illimitata. Dunque ad un ingresso limitato (ed a stato iniziale $\mathbf{0}$) corrisponde un'uscita illimitata e quindi il sistema instabile esternamente nello stato zero. Ciò contrasta con l'ipotesi e prova quanto asserito.

Per chiarezza, i legami tra i due tipi di stabilità esterna sono evidenziati in fig. V.4.

V.7 - Sulle proprietà di stabilità interna delle realizzazioni di una matrice di risposte impulsive.

Si è più volte messo in evidenza che taluni sistemi possono essere descritti in modo completo dalla matrice delle risposte impulsive; in particolare, nel Capitolo IV, si è chiarito il significato in cui ciò va inteso e si sono precisate le condizioni (raggiungibilità e osservabilità) sotto le quali ciò si verifica.

Si è mostrato, d'altra parte, nel paragrafo precedente, che le condizioni affinchè un sistema sia stabile esternamente nello stato zero coinvolgono la sola matrice delle risposte impulsive. Talora anzi si sottolinea questo fatto attribuendo direttamente la proprietà di stabilità alla stessa matrice delle risposte impulsive e si dice che $\mathbf{W}(t)$ è stabile o instabile a seconda che soddisfa o no ad una delle tre condizioni elencate alla fine del paragrafo precedente.

Appare allora interessante il problema di esaminare se dalle proprietà di stabilità esterna nello stato zero (ossia, dalla stabilità di $\mathbf{W}(t)$)

si possono dedurre informazioni sulle proprietà di stabilità interna. È evidente, per quanto detto all'inizio, che tale problema è ben posto solo con riferimento alla classe dei sistemi raggiungibili e osservabili.

Il risultato che si può stabilire in proposito è il seguente: *le realizzazioni minime di una matrice* $\mathbf{W}(t)$ *stabile caratterizzano un sistema asintoticamente stabile, internamente*. Talora si enuncia questo risultato anche dicendo che *nei sistemi raggiungibili e osservabili, la stabilità esterna nello stato zero implica quella interna asintotica*.

Per dimostrare questo risultato si osservi che, se $\mathbf{W}(t)$ è una matrice di risposte impulsive realizzabile esistono tre matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ tali che:

$$\text{(V.52)} \qquad \mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{B} = \mathbf{W}(t) \qquad \forall t \in R$$

D'altra parte, l'ipotesi si stabilità di $\mathbf{W}(t)$ implica la validità della (V.50) o, il che è lo stesso:

$$\text{(V.53)} \qquad \lim_{t \to \infty} \mathbf{W}(t) = \mathbf{0}$$

Da quest'ultima, tenendo presente che ogni elemento di una $\mathbf{W}(t)$ realizzabile ha la forma indicata nella nota a pag.141, si ha anche:

$$\text{(V.54)} \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{d^i\, \mathbf{W}(t)}{dt^i} = \mathbf{0} \qquad i \geq 0$$

Tenuto conto ora della (V.52) e posto $i = h + k$ si ha:

$$\text{(V.55)} \qquad \frac{d^i\, \mathbf{W}(t)}{dt^i} = \mathbf{C}\, \mathbf{A}^i\, e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{B} = \mathbf{C}\, \mathbf{A}^h\, e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{A}^k\, \mathbf{B}$$

dove l'ultimo passaggio è consentito dal fatto che $\mathbf{A}$ ed $e^{\mathbf{A}t}$ commutano [cfr. (III.5) per la verifica di ciò].

Si consideri ora la matrice:

$$\text{(V.56)} \qquad \mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} e^{\mathbf{A}t} (\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \dots\ \mathbf{A}^{n-1}\,\mathbf{B}) = \mathbf{Q}\, e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{P}$$

in cui simboli $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}$, introdotti per brevità, sono di ovvia interpretazione. Le (V.54) e (V.55) implicano allora:

$$\text{(V.57)} \qquad \lim_{t \to \infty} \mathbf{S}(t) = \mathbf{0}$$

Se la terna $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ costituisce una realizzazione minima, essa individua un sistema raggiungibile ed osservabile (cfr. pag. 144). Di conseguenza il primo fattore a secondo membro nella (V.56) ha le n colonne linearmente indipendenti e così il terzo fattore ha le n righe linearmente indipendenti. Si può quindi isolare $e^{\mathbf{A}t}$ nel modo seguente:

$$\text{(V.58)} \qquad e^{\mathbf{A}t} = [\mathbf{Q}'\mathbf{Q}]^{-1}\, \mathbf{Q}'\, \mathbf{S}(t)\, \mathbf{P}'\, [\mathbf{P}\mathbf{P}']^{-1}$$

A questo punto la (V.57) implica:

$$\text{(V.59)} \qquad \lim_{t \to \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$$

e cioè, per i risultati stabiliti nel paragrafo V.5, la stabilità asintotica della realizzazione minima $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Essendo tutte le realizzazioni minime una classe di equivalenze rispetto ad una trasformazione di coordinate nello spazio di stato, tale proprietà di stabilità interna è valida per qualunque di esse.

Tenendo ora conto che la (V.59) implica sempre la (V.53) (la stabilità asintotica interna implica sempre la stabilità di $\mathbf{W}(t)$) si può riassumere quanto discusso sopra nel diagramma di fig.V.4. In esso, per completezza, sono anche indicati i legami tra stabilità interna asintotica e stabilità esterna. L'implicazione della prima verso la seconda è conseguenza del fatto che la (V.59), oltre ad implicare la (V.53) [e quindi la (V.38)] implica anche la limitatezza di $\Psi(t) = \mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}t}$ [e quindi la formula (V.37)] (1).

Il legame tra stabilità esterna e stabilità interna asintotica si può dedurre dai lati inferiori del diagramma stesso.

V.8 - Cenni sui criteri di stabilità.

Nei paragrafi V.5 e V.6 sono state messe a punto condizioni (necessarie e sufficienti) per la verifica della stabilità di un assegnato sistema lineare stazionario.

(1) - Si noti che il legame così stabilito è più generale di quello deducibile attraverso la stabilità esterna nello stato zero.

Per l'impiego di tali condizioni è richiesta, nel caso della stabilità interna (asintotica o non), la conoscenza della matrice di transizione $\Phi(t)$ e, nel caso della stabilità esterna, la conoscenza della matrice delle risposte impulsive $\mathbf{W}(t)$ (stabilità nello stato zero) o anche di entrambe le funzioni $\Psi(t)$ e $\mathbf{W}(t)$ (stabilità in un qualsiasi stato).

Se il sistema di cui si desidera analizzare la stabilità è assegnato mediante un modello differenziale l'impiego di tali condizioni comporta dunque sostanzialmente la conoscenza della soluzione di equazioni del tipo (II.56). Ciò è vero anche se si adottano quelle formulazioni delle condizioni di stabilità che si riferiscono o alle radici del polinomio minimo di $\mathbf{A}$ o ai poli di $\Psi(s)$ e di $\mathbf{W}(s)$. La determinazione di tali grandezze è infatti il punto essenziale nella soluzione di tali equazioni.

È importante però, dal punto di vista applicativo, disporre di criteri per la verifica delle condizioni di stabilità che non richiedano il calcolo esplicito delle soluzioni dell'equazione (II.56). Una tale esigenza si inquadra chiaramente nello spirito della cosiddetta teoria *qualitativa*, sulla quale si è già avuto occasione di soffermarsi (cfr., ad esempio, paragrafo IV.5), e nella quale si cerca di individuare determinate caratteristiche globali delle soluzioni di una data equazione differenziale (la stabilità è proprio una di queste) evitando il calcolo esplicito delle soluzioni stesse.

Per essere più precisi, e riferendosi ai casi di maggior interesse, ciò che si desidera, ai fini dello studio della stabilità, sono criteri per verificare:

a) se tutti gli autovalori di una assegnata matrice quadrata $\mathbf{A}$ abbiano o meno parte reale negativa (caso della stabilità interna asintotica);

b) se tutte le radici di un assegnato polinomio $p(s)$ abbiano o meno parte reale negativa (caso della stabilità esterna nello stato zero);

senza calcolare esplicitamente tali autovalori o radici.

Va subito osservato, peraltro, che un criterio della classe (b) può essere utilizzato per effettuare anche la verifica della condizione di cui in (a), se si riflette che gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono le radici del polinomio $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$.

Per una presentazione dei criteri più diffusi tra quelli che consentono di verificare la condizione (b), si rinvia al Capitolo X del volume di A. Lepschy e A. Ruberti: *Lezioni di Controlli Automatici*, Siderea, Roma, 1973.

Esistano anche criteri per la verifica diretta della condizione (a), che si collegano al cosiddetto metodo diretto di Lyapunov per lo studio della stabilità e dei quali qui non si fa cenno in queste note per i limiti che ci si è imposti[1].

*

(1) - Cfr., ad esempio, il volume di A. Ruberti: *Elementi di Teoria della Stabilità* (Capitolo III), La Goliardica, Roma, 1968.

APPENDICE V

A.V.1 - Norma di un vettore.

Si ricorda innanzitutto che, dato uno spazio vettoriale X definito su un campo F, la norma di un vettore $\mathbf{x}$ è una funzione $X \rightarrow R$, il cui valore viene indicato con $\|\mathbf{x}\|$, che soddisfa ai seguenti postulati:

$$(1) \qquad \|\mathbf{x}\| \geq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in X$$

$$(2) \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \qquad \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(3) \qquad \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\| \qquad \forall \mathbf{x} \in X, \quad \forall \alpha \in F$$

$$(4) \qquad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$$

La norma in uno spazio vettoriale X viene utilizzata, nel Capitolo V, per definire:

a) una *distanza* tra due elementi $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ di X con la relazione(1):

$$(5) \qquad d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$$

In conseguenza si può allora dire che una successione di vettori $\{\mathbf{x}_n\}$ di X *converge di norma* a $\mathbf{x}$ se:

$$(6) \qquad \lim_{h \to \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$$

b) il concetto di *limitatezza* per una funzione che assuma valori in X. Precisamente, se $\mathbf{f}$ è una funzione $R \rightarrow X$ si dirà che $\mathbf{f}$ è *limitata sull'intervallo* $[t_0, t_1]$ se esiste un numero reale $k > 0$ tale che:

(1) - Si veda in proposito il testo di A. Ghizzetti - L. Marchetti - A. Ossicini: *Lezioni di complementi di Analisi matematica*, Veschi, Roma, 1972.

$$(7) \qquad \|\mathbf{f}(t)\| < k \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Viceversa, si dice che $\mathbf{f}$ è illimitata sull'intervallo $[t_0, t_1]$ se, comunque si fissi un numero reale k arbitrariamente grande, esiste un valore $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ tale che:

$$(8) \qquad \|\mathbf{f}(\bar{t})\| > k$$

A.V.2 - Equivalenza delle norme su spazi a dimensioni finite.

Se lo spazio X è *a dimensione finita* le norme che possono essere ivi definite godono della seguente importante proprietà (di cui si omette, per brevità, la dimostrazione(1)): comunque si considerino due norme $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$, esistono due numeri reali $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ tali che:

$$(9) \qquad k_1 \|\mathbf{x}\|_\alpha < \|\mathbf{x}\|_\beta < k_2 \|\mathbf{x}\|_\alpha \qquad \forall \mathbf{x} \in X$$

In virtù di questa proprietà, si verifica che, se vale la (5) per una assegnata norma $\|\cdot\|_\alpha$, allora, per ogni altra norma $\|\cdot\|_\beta$, si ha:

$$(10) \qquad \lim_{n \to \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_\beta = 0$$

ovverosia, la convergenza di $\mathbf{x}_n$ ad $\mathbf{x}$ è indipendente dalla norma prescelta.

Una proprietà analoga si verifica anche a proposito della limitatezza o illimitatezza di $\mathbf{f}$; si verifica infatti che, comunque si considerino due norme $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$:

$$(11) \qquad \{\exists k : \|\mathbf{f}(t)\|_\alpha < k, \ \forall t \in [t_0, t_1]\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists k' : \|\mathbf{f}(t)\|_\beta < k', \ \forall t \in [t_0, t_1]\}$$

Per tali motivi è usuale dire che le *norme in uno spazio vettoriale a dimensione finita sono equivalenti.*

L'utilità di questo fatto si manifesta sia nella possibilità di presentare i risultati indipendentemente dalla norma prescelta, sia di servir-

(1) - Si vada in proposito, ad esempio, il testo di H.L. Royden, *Real Analysis*, Mc Millan (London), 1968, pp. 181-197.

si, nelle dimostrazioni, delle norme di volta in volta più convenienti. Per illustrare ad esempio questi punti si consideri la definizione (b) di limitatezza di una funzione $\mathbf{f} : R \to C^n$. Assumendo come norma in C^n la funzione:

$$||\mathbf{x}|| = \max_i |x_i| \tag{12}$$

è immediato constatare che $\mathbf{f}$ è limitata se e solo se esiste un $k > 0$ tale che:

$$|f_i(t)| < k \qquad \forall i\ ,\ \forall t \in [t_0, t_1] \tag{13}$$

mentre è illimitata se; comunque si scelga $k > 0$, esistono un indice j ed un istante $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ tali che:

$$|f_j(\bar{t})| > k \tag{14}$$

In altri termini una $\mathbf{f} : R \to C^n$ è limitata in norma se e solo se ogni sua componente è limitata in modulo; ciò vale per ogni norma in C^n.

A.V.3 - Norma di una matrice.

Considerando una matrice come rappresentazione di una trasformazione lineare tra spazi vettoriali a dimensione finita è usuale definirne una norma al seguente modo. Se $\mathbf{A}$ è una matrice $m \times n$ ad elementi complessi, $||\cdot||'$ una norma in C^n e $||\cdot||''$ una norma in C^m, la grandezza:

$$\sup_{x \in C^n} \frac{||\mathbf{A}\,\mathbf{x}||''}{||\mathbf{x}||'} \tag{15}$$

viene detta norma di $\mathbf{A}$, indotta dalle norme prescelte su C^n e C^m. È immediato constatare che la norma $||\mathbf{A}||$ soddisfa la relazione:

$$||\mathbf{A}\mathbf{x}||'' \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{x}||' \qquad \forall \mathbf{x} \in C^n \tag{16}$$

Purchè sia chiarito dal particolare contesto, gli apici che contraddistinguono le norme su C^n e C^m possono venire omessi.

Si può inoltre provare che, definite comunque due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ per le quali abbiano senso le operazioni $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, si ha:

$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}|| \tag{17}$$

$$||\mathbf{A}\,\mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{B}|| \tag{18}$$

In corrispondenza alle norme che vengono considerate usualmente per i vettori in C^n:

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{19}$$

$$||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{20}$$

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_i |x_i| \tag{21}$$

se si assumono concordemente tali norme anche in C^m, si può dimostrare che ha, nell'ordine:

$$||A||_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \tag{22}$$

$$||A||_2 = \sqrt{\text{massimo autovalore di } \mathbf{A}^* \mathbf{A}} \tag{23}$$

$$||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \tag{24}$$

Le considerazioni svolte a proposito della limitatezza di funzioni a valori vettoriali possono essere facilmente estese al caso di funzioni a valori matriciali. Poichè a proposito delle norme definibili per una matrice vale una relazione analoga alla (9), si dirà che una funzione $\mathbf{F} : R \to C^{m \times n}$ è limitata (o illimitata) se, scelta arbitrariamente una norma, vale una relazione analoga alla (7) (o alla (8)). Così tenendo presente la (22) o la (24), si può anche concludere che $\mathbf{F}$ è limitata se esiste un $k > 0$ tale che:

$$|f_{ij}(t)| < k \qquad \forall i\ ,\ \forall j,\ \ \forall t \in [t_0, t_1] \tag{25}$$

e viceversa, illimitata se, comunque si scelga $k > 0$, esistono un $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ e due indici r ed s, tali che:

$$|f_{rs}(\bar{t})| > k \tag{26}$$

*

INDICE

CAPITOLO III : **Sistemi lineari stazionari.**

APPENDICE III

CAPITOLO IV : **Elementi di teoria della struttura e di teoria della realizzazione.**

APPENDICE IV

CAPITOLO V : **Elementi di teoria della stabilità**
(con riferimento ai sistemi lineari stazionari)

APPENDICE V

*

FINITO DI STAMPARE
DICEMBRE 1973