PROVA CONCLUSIVA DI CALCOLO DELLE PROBABILITA
(18 Giugno 2003)

1) Due compagnie aree partono per la stessa destinazione ogni giorno alla stessa ora. Ogni giorno 1000 passeggeri scelgono con probabilità 1/2 una delle due compagnie. Dire quanti posti ogni compagnia deve fornire per avere almeno il 95 per cento di confidenza di non dover rifiutare dei passeggeri.

2) Sia $\alpha > 1$ e sia

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha - 1)\frac{1}{x^{\alpha}} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verificare che f è una densità.
(i) Calcolare la funzione di ripartizione.
(ii) Dimostrare che per $1 < \alpha \leq 2$ la media non esiste e si calcoli la media per ogni $\alpha > 2$.
(iii) Dimostrare che per $1 < \alpha \leq 3$ la varianza non esiste e si calcoli la varianza per ogni $\alpha > 3$.

3) Si illustri con esempi la nozione di convergenza in media quadratica e di convergenza in probabilità.

SOLUZIONE DELLA PROVA CONCLUSIVA DI CALCOLO DELLE PROBABILITA (18 Giugno 2003)

(1). Siano X_i, $i = 1, \dots 1000$ variabili di Bernoulli di parametro $1/2$ che valgono 1 se l'i-esimo passeggero sceglie la compagnia aerea in esame. Quindi

$$S_{1000} = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

è il numero totale di passeggeri che scelgono la compagnia. Nel testo dell' esercizio si richiede di calcolare x tale che

$$P(|S_{1000} - 500| \leq x) \geq 0.95$$

Dalla disuguaglianza di Chebitchev otteniamo

$$P(|S_{1000} - 500| \geq x) \leq \frac{1}{x^2} \operatorname{var}(S_{1000}) = \frac{1}{x^2} \frac{1000}{4}$$

Quindi x si trova imponendo che il secondo membro sia minore o uguale a $5/100$.

2) Per ogni x si ha che $0 \leq f(x) \leq 1$ inoltre poichè la primitiva di f è $-x^{-\alpha+1}$ ed $\alpha > 1$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = 1$$

La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ 1 - x^{-\alpha+1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Poichè la primitiva di $xf(x)$ è $-\frac{\alpha-1}{\alpha-2}x^{-\alpha+2}$, la media non esiste per $\alpha \in (1, 2]$ ed è uguale a $\frac{\alpha-1}{\alpha-2}$ per $\alpha > 2$.

Poichè la primitiva di $x^2 f(x)$ è $-\frac{\alpha-1}{\alpha-3}x^{-\alpha+3}$, il momento secondo (e quindi anche la varianza) non esiste per $1 < \alpha \leq 3$. Se $\alpha > 3$ allora

$$\begin{aligned} var(X) &= \int_1^{\infty} x^2 f(x)dx - \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-2)^2} = \frac{\alpha-1}{\alpha-3} - \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-2)^2} \\ &= (\alpha-1)\frac{(\alpha-2)^2 - (\alpha-1)(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\alpha-2)^2} \\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-3)(\alpha-2)^2} \end{aligned}$$