PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO DELLE PROBABILITA (12 Maggio 2003)

1) In una fabbrica c'è una macchina che è soggetta ad aleatorie cadute di tensione nella potenza erogata. Queste cadute si verificano ogni ora indipendentemente con probabilità p.
(a). Si calcoli la distribuzione del numero di cadute di tensione avvenute nelle 24 ore di un giorno in cui la macchina è rimasta sempre accesa.
(b). Usando la distribuzione del numero di cadute, si calcoli la distribuzione del tempo in cui avviene una caduta di tensione per la prima volta. Si dica quanto deve essere p affinchè in media la prima caduta di tensione non avvenga entro le 24 ore.
(c). Si calcoli la probabilità che la prima caduta di tensione avvenga alle 3 sapendo che la seconda avviene dopo 2 ore dalla prima.
(d). Si calcoli la distribuzione del tempo in cui avviene la seconda caduta di tensione.
(e). Si calcoli la probabilità che la prima caduta di tensione avvenga alle 3 sapendo che la seconda avviene alle 10.

2) Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10: si effettua l'estrazione di una pallina. Il giocatore A vince 1 euro se esce un numero pari altrimenti rimane con i soldi che ha. Invece il giocatore B vince 1 euro se esce un numero pari minore o uguale a 6, perde 1 euro se esce un numero dispari e rimane con i soldi che ha negli altri casi.
(a). Indicando con V_A e V_B rispettivamente le vincite/perdite dei giocatori A e B, calcolare la distribuzione congiunta di V_A e V_B. Dire se sono indipendenti.
(b) Calcolare la probabilità che V_A sia (strettamente) maggiore di V_B.
(c). Calcolare la distribuzione di $Z \equiv V_A + V_B$, Calcolare la media e la varianza di Z.

3) Un sacchetto contiene 10 palline bianche e 6 nere. Se ne estraggono 2 senza rimpiazzo.
(a). Calcolare la probabilità che siano entrambe nere. Calcolare la probabilità che la prima sia bianca e la seconda sia nera. Calcolare la probabilità che siano una bianca ed una nera.
(b). Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca condizionata al fatto che la seconda estratta è bianca.
(c). Indicando con N_B e con N_N rispettivamente il numero di palline bianche e di palline nere estratte, si calcoli la distribuzione congiunta e dire se sono indipendenti.

SOLUZIONE DELLA PROVA INTERMEDIA DI CALCOLO DELLE PROBABILITA (12 Maggio 2003)

(1). Indichiamo con X_i, $i = 1, 2, ..., 24$ le variabili aleatorie che valgono 1 se all'ora i si verifica una caduta di tensione e 0 altrimenti. Per ipotesi esse sono variabili di Bernoulli indipendenti con parametro p. Indichiamo inoltre con T_1 l'ora in cui avviene la prima caduta e con T_2 quella della seconda.
(a). La distribuzione del numero di cadute è la distribuzione della somma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n = 24$$

che è una binomiale $B(24, p)$.
(b). La distribuzione di T_1 si ottiene osservando che

$$P(T_1 > k) = P(S_k = 0) = (1-p)^k, \qquad k = 1, \ldots 24$$

$$P(T_1 = k) = P(T_1 > k-1) - P(T_1 > k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quindi la distribuzione di T_1 è geometrica di parametro p. La media

$$E(T_1) = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

Quindi basta scegliere $p < \frac{1}{24}$.
(c). La probabilità richiesta è

$$\frac{P(\{T_1 = 3\} \cap \{T_2 - T_1 = 2\})}{P(\{T_2 - T_1 = 2\})}$$

e poichè T_1 e $T_2 - T_1$ sono indipendenti con stessa distribuzione geometrica, si ha

$$\frac{P(\{T_1 = 3\} \cap \{T_2 - T_1 = 2\})}{P(\{T_2 - T_1 = 2\})} = \frac{p(1-p)^2 p(1-p)}{p(1-p)} = p(1-p)^2$$

(d). La distribuzione di T_2 è quella della somma delle due geometriche T_1 e $T_2 - T_1$ e' quindi una binomiale negativa di parametri 2 e p,

$$P(T_2 = k) = \sum_{h=1}^{k-1} P(T_1 = h) P(T_2 - T_1 = k - h) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

(e). Ricordando la definizione delle X_i, si ha che

$$P(T_1 = 3/T_2 = 10) = \frac{1}{9p^2(1-p)^8} P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, \ldots, X_{10} = 1) = \frac{1}{9}$$

(2).
(a) La distribuzione congiunta è:

$V_B \setminus V_A$	0	1
-1	1/2	0
0	0	1/5
1	0	3/10

Non sono indipendenti perchè per esempio

$$P(V_A = 1, V_B = 0) = \frac{1}{5} \neq P(V_A = 1)P(V_B = 0) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{5}$$

(b) Indicando con $p(x, y) = P(V_A = x, V_B = y)$, $x \in \{0, 1\}$, $y \in \{-1, 0, 1\}$ otteniamo

$$P(V_A > V_B) = p(0, -1) + p(1, -1) + p(1, 0) = 1/2 + 0 + 1/5 = 7/10$$

(c). La variabile casuale Z assume valori $-1, 0, 1, 2$,

$$P(Z = -1) = p(0, -1) = \frac{1}{2}, \qquad P(Z = 0) = p(0, 0) + p(1, -1) = 0,$$

$$P(Z = 1) = p(0, 1) + p(1, 0) = \frac{1}{5}, \qquad P(Z = 2) = p(1, 1) = \frac{3}{10}$$

La media è data da

$$E(Z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 2\ \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

La varianza

$$var(Z) = E(Z^2) - \frac{9}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 4\ \frac{3}{10} - \frac{9}{100} = \frac{181}{100} = 1.81$$

(3).
(a) Indichiamo con X_1 ed X_2 le variabili casuali associate alla prima ed alla seconda estrazione. Esse possono assumere i valori B, N (B=bianco, N=nero). E' facile calcolare $P(X_1 = N) = 6/16 = 3/8$. Inoltre e' anche facile calcolare $P(X_2 = N/X_1 = N) = 5/15 = 1/3$. Quindi

$$P(X_1 = N, X_2 = N) = P(X_1 = N)P(X_2 = N/X_1 = N) = 1/8$$

Analogamente

$$P(X_1 = B, X_2 = N) = P(X_1 = B)P(X_2 = N/X_1 = B) = 1/4$$

L'evento una pallina e' bianca ed una e' nera corrisponde a $\{X_1 = B, X_2 = N\} \bigcup \{X_1 = N, X_2 = B\}$. Quindi

$$P\left(\{X_1 = B, X_2 = N\} \bigcup \{X_1 = N, X_2 = B\}\right) =$$
$$P\left(X_1 = B, X_2 = N\right) + P\left(X_1 = N, X_2 = B\right) = \frac{1}{2}$$

La prima uguaglianza e' dovuta al fatto che gli eventi sono disgiunti, il valore $\frac{1}{2}$ si ottiene procedendo come nei casi precedenti.
(b)

$$P(X_1 = B/X_2 = B) = \frac{P(X_1 = B, X_2 = B)}{P(X_2 = B)}$$

Procedendo come nel caso (a) si calcola facilmente $P(X_1 = B, X_2 = B) = \frac{3}{8}$. Inoltre

$$P(X_2 = B) = P(X_2 = B/X_1 = B)P(X_1 = B) + P(X_2 = B/X_1 = N)P(X_1 = N) = \frac{5}{8}$$

Il risultato finale e' quindi $P(X_1 = B/X_2 = B) = \frac{3}{5} = P(X_2 = B/X_1 = B)$.
(c)

$N_B \setminus N_N$	0	1	2
0	0	0	1/8
1	0	1/2	0
2	3/8	0	0

Le variabili non sono indipendenti in quanto ad esempio $P(N_B = 1, N_N = 0) = 0 \neq P(N_B = 1)P(N_N = 0) = \frac{1}{2}\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$.