CdL in Matematica e Fisica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Seconda settimana - I Semestre

Esercizio 1

Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y-x^2} & y - x^2 > \sqrt{|x|} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{5/2}|y-1|}{x^4+y^2-2y+1} & (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

Esercizio 2

In che modo può essere definita la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}, \qquad x \neq y$$

lungo la retta $y = x$ affinchè la funzione ottenuta sia continua in tutto $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 3

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ delle funzioni seguenti:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} xye^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} x + x^2 y & y \geq 0 \\ \frac{e^{xy}-1}{y} & y < 0 \end{cases} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{x}{x-y^2}\right) & x \neq y^2 \\ 0 & x = y^2 \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} xe^{-\frac{x}{y^2}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare le derivate parziali di $f(x,y)$ in tutti i punti (x,y) del piano. È continua f in $(0,0)$? Sono continue le derivate parziali in $(0,0)$? f è differenziabile in $(0,0)$?

Esercizio 5

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della seguente funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+2y^2)^\alpha & x > 0 \\ x^2+2y^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dimostrare che esiste α_0 tale che f sia continua in $(0,0)$. Sia ora $\alpha = 0$: dire se f è derivabile e differenziabile.

Esercizio 7

Calcolare la derivata della funzione $z = x^2 - xy - 2y^2$ nel punto $(1,2)$ in una direzione formante con l'asse delle ascisse un angolo di 60^0.

Esercizio 8

Sia $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si calcolino tutte le derivate direzionali $D_v f(x)$, $x \neq 0$ (v vettore di $\mathbb{R}^n$).

Esercizio 9

Siano $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, Verificare che

a) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{f} = \nabla \operatorname{div}\mathbf{f} - \Delta\mathbf{f}$.

b) $\operatorname{div}(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \operatorname{rot}\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{g}$

c) $\operatorname{rot}(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = (\operatorname{div}\mathbf{g})\mathbf{f} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\operatorname{div}\mathbf{f})\mathbf{g} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$

c) $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \wedge (\operatorname{rot}\mathbf{g}) + \mathbf{g} \wedge (\operatorname{rot}\mathbf{f}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}$