CdL in Fisica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Nona settimana - I Semestre

Esercizio 1

Verificare il teorema della divergenza per il campo $F(x, y, z) = (x, y^2, yz)$ e il dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 2\}$.

Esercizio 2

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y^3 \cos z, x^3 e^z, -yz^2 \sin x)$ uscente attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ 0 \leq z \leq \sqrt{5}\}$.

Esercizio 3

Tra i rettangoli di perimetro assegnato, determinare quelli di area massima.

Esercizio 4

Determinare la distanza minima che intercorre tra il punto $P = (-1, 0)$ e i punti della curva $y^2 = x^3$.

Esercizio 5

Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x - y + 2z$. Calcolare $f(A)$.

Esercizio 6

Calcolare il massimo e il minimo assoluto per la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x - y$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 3,\ |y| \leq 3,\ |x + y| \leq 4, |x - y| \leq 4\}$.

Esercizio 7

Data la funzione $f(x, y, z) = x + y + z$, determinare i suoi punti di massimo e di minimo relativo e assoluti sull'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ (z-1)^2 = x^2 + y^2\}$.

Esercizio 8

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

Esercizio 9

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $(0,+\infty)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, della successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt{1+(nx)^\alpha} - \sqrt{(nx)^\alpha}$.

Esercizio 10

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ e in $[a,2]$ con $a > 0$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n^3}{8}(x+\frac{1}{n})^3 & \text{se } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Esercizio 11

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2} dy \qquad n \geq 1,$$

provare che f_n è continua su $\mathbb{R}$ per ogni n e studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n.

Esercizio 12

Sia data la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^\alpha t e^{-nt} \qquad n \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) dimostrare che $f_n(t)$ converge a 0 puntualmente in $[0,+\infty)$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) dimostrare che f_n converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[r,+\infty)$ con $r > 0$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) dimostrare che f_n converge uniformemente in $[0,1]$ se e solo se $\alpha < 1$;

d) dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.

Esercizio 13

Siano $a > 0$, $b > 1$. Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0, b]$ della successione di funzioni (f_n) definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} an^2x & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b}n^2x + \frac{ab}{b-1}n & \text{se } \frac{1}{n} \le x < \frac{b}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{b}{n} \le x \le b. \end{cases}$$

(Suggerimento: dopo aver studiato la convergenza puntuale, studiare la convergenza di $\int_0^b f_n(x)dx$.)

Esercizio 14

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0, 1]$ delle successioni

$$f_n(t) = t - \frac{t^n}{n} \qquad \text{e} \qquad f'_n.$$

Verificare poi che non sono verificate le ipotesi per lo scambio tra limite e derivata in $[0, 1]$ e che risulta

$$\frac{d}{dt} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \neq \lim_{n \to +\infty} f'_n(t).$$