CdL in Matematica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Nona settimana - I Semestre

Esercizio 1

Verificare il teorema della divergenza per il campo $F(x,y,z) = (x, y^2, yz)$ e il dominio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ |z| \leq 2\}$.

Esercizio 2

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F(x,y,z) = (y^3 \cos z, x^3 e^z, -yz^2 \sin x)$ uscente attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ 0 \leq z \leq \sqrt{5}\}.$$

Esercizio 3

Tra i rettangoli di perimetro assegnato, determinare quelli di area massima.

Esercizio 4

Determinare la distanza minima che intercorre tra il punto $P = (-1, 0)$ e i punti della curva $y^2 = x^3$.

Esercizio 5

Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x - y + 2z$. Calcolare $f(A)$.

Esercizio 6

Calcolare il massimo e il minimo assoluto per la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x - y$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 3,\ |y| \leq 3,\ |x+y| \leq 4, |x-y| \leq 4\}$.

Esercizio 7

Data la funzione $f(x,y,z) = x+y+z$, determinare i suoi punti di massimo e di minimo relativo e assoluti sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ (z-1)^2 = x^2+y^2\}$.

Esercizio 8

Mostrare che la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0, \end{cases}$$

non soddisfa le ipotesi del teorema di Schwarz nel punto $(0,0)$.

Esercizio 9

Date le funzioni

$f(x,y,z) = \tan x + \sin(y+z-x) + \cos(xyz) - 1 = 0 \qquad g(x,y,z) = \log(1+4xyz) + \arcsin(x+y)$

si consideri l'insieme

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0, g(x,y,z) = 0\}.$$

Dimostrare che in un intorno dell'origine si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza, in particolare $x = x(y)$, $z = z(y)$. Trovare tale parametrizzazione con un errore $o(y)$ e $o(y^2)$.

Esercizio 10

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} e^z - (x+y)\sin(x+y) + \log(1+x+z) - 1 = 0 \\ z\tan(xy) + \log(1+x) + \arctan(y-x) = 0 \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $x = x(z),\ y = y(z)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $z = 0$.

Esercizio 11

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} (x+y)\sin(x+y) + e^{z+y} + \log(1+zx) = 1 \\ (z+y)e^{z+y} + \sin(x+y) + \log(1+xy) = 0. \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $x = x(y),\ z = z(y)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $y = 0$. Si scrivano le equazioni della retta tangente e del piano normale alle curva $x = x(t)$, $y = t$, $z = z(t)$.

Esercizio 12

Si consideri la curva di R^3, $\Gamma = \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2,\ x + y + z = 0\}$. Provare che Γ esiste e trovarne la retta tangente in ogni suo punto.

Esercizio 13

Dati i due insiemi

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^5 y - y^2\sqrt{z} = -2\}, \qquad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \log(x+y+z) + x^2\sin(y+z)\},$$

dire se in un intorno del punto $(1,-1,1)$, la loro intersezione definisce una curva e in tal caso scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva.