Corso di Laurea in Fisica A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Esercizi di Riepilogo del Corso

Esercizio 1

Si dimostri che il problema

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

ammette infinite soluzioni. Invece il problema

$$y' = y^{2/3} + a, \quad y(0) = 0, . \quad a > 0$$

ammette un'unica soluzione.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 + y^2)te^{t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza e unicità. La soluzione esiste globalmente?

Esercizio 3

Date la successione di funzioni

$$f_n(x) = x^n \log x$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme di $f_n(x)$ e la convergenza puntuale, uniforme e totale di $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Esercizio 4

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1/n} - 1}{x^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^{5/2}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + e^{nx})^{nx} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(x^2 + n)}{1 + n^2|x|}.$$

Esercizio 5

Studiare la differenziabilità della funzione seguente: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x+y, |xy|)$.

Esercizio 6

Data
$$f(x, y, z) = xyz \log(x^2 + y^2),$$
dire se f si può estendere con continuità a tutto $\mathbb{R}^3$. Studiare la differenziabilità di f.

Esercizio 7

Studiare l'insieme di definizione, la continuità e la differenziabilità della funzione
$$f(x, y) = \int_{-y^2}^{x^2} \frac{\sin(tx)}{t} dt.$$

Esercizio 8

Data la funzione
$$f(x, y) = x^y - 2y + 2x$$
si determini per quale direzione v si ha $D_v f(1, 1) = 2$. Qual è la direzione lungo la quale la funzione cresce di più vicino a $(1, 1)$?

Esercizio 9

Sia
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 2 \text{ e } 0 \leq y < 1 - |x^2 - 1|\}$$
e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \arctan(-x^2 + 2xy)$.

1. Dire se f possiede punti critici in $\bar{A}$ e, in caso affermativo, determinarne la natura.

2. Dire se f possiede massimo e minimo assoluto in A e, in caso affermativo, determinarli.

Esercizio 10

Sia $F(x, y, z) = -(x-3)^2 + x \sin(y+1) \ln(z+2) + e^z - 4x + 7$. Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = z(x, y)$ in un intorno del punto $(1, -1, 0)$. Determinare il piano tangente alla superficie nel punto $(1, -1, 0)$.

Esercizio 11

Data la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + z^2\right) dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} dy + 2xzdz.$$

Determinare il dominio di definizione di ω e dire se è semplicemente connesso. Verificare se ω è una forma differenziale chiusa. Dimostrare se è una forma esatta e in tal caso calcolarne una primitiva.

Esercizio 12

Date le funzioni $y = \sqrt{\sin x}$ e $y = 2\sin x$, sia $P_0 = (x_0, y_0)$ il punto di intersezione tra le due curve con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Siano poi

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < \frac{\pi}{2},\ \sqrt{\sin x} \le y \le 2\sin x\},\\
&A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0,\ 2\sin x \le y \le \sqrt{\sin x}\},\\
&f(x,y) = \begin{cases} y\cos^4 x & \text{se } (x,y) \in A_1 \\ -y\cos^4 x & \text{se } (x,y) \in A_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Calcolare

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f(x,y)dxdy.$$

Esercizio 13

Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, x > 0, 0 \le y \le \sqrt{3}x\}.$$

Calcolare il volume del cilindroide di base D e generatrici parallele all'asse z, relativo alla funzione $\sin\sqrt{x^2+y^2}$.

Esercizio 14

Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{(x^2+y^2)(2x^2+4y^2)}{x^3} dxdy,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ \frac{1}{2}x^2 \le y \le x^2\}.$$

Esercizio 15

Verificare il teorema della divergenza per il campo $F(x,y,z) = (x, y^2, yz)$ e il dominio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ |z| \leq 2\}$.

Esercizio 16

Dato il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\frac{x^2+x+y^2}{(1+x)^2+y^2}, -\frac{y}{(1+x)^2+y^2}\right)$, calcolare l'integrale $\int_\gamma F$, dove γ è la curva

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$$

orientata da $(1,0)$ a $(0,2)$.

Esercizio 17

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y^3 \cos z, x^3 e^z, -yz^2 \sin x)$$

uscente attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ 0 \leq z \leq \sqrt{5}\}.$$

Esercizio Importante

Sia $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n d\theta$ dimostrare che

i) $a_n = (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n$

ii) $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}$, $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

iii) $a_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}\dfrac{\pi}{2}$, $\quad a_{2n+1} = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}$.

Sia ora ω_n il volume della sfera di raggio uno in $\mathbb{R}^n$ che denotiamo con $B_n(0,1)$. Verificare che

iv) $volume(B_n(0,R)) = R^n \omega_n$, dove $B_n(0,R)$ è la sfera di raggio R in $\mathbb{R}^n$.

v) $\omega_{n+1} = \displaystyle\int_{B_{n+1}(0,1)} 1dx = \omega_n \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n/2} dt = 2\omega_n \int_0^{\pi/2} (1\sin^2\theta)^{n/2} \cos\theta d\theta = 2\omega_n a_{n+1}$

vi) $\omega_n = 2^n \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$, $\quad \omega_{2n} = \dfrac{\pi^n}{n!}$, $\quad \omega_{2n+1} = \dfrac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1}$