Corso di Laurea in Matematica A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Esercizi di Riepilogo del Corso

Esercizio 1

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e siano $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$, due norme su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

1a) le due norme sono equivalenti,

1b) $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, dove $\|x\|_\infty = max_{i=1,\dots,n}\{|x_i|\}$.

Esercizio 2

Studiare la differenziabilità della funzione seguente: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x+y, |xy|)$.

Esercizio 3

Data

$$f(x, y, z) = xyz \log(x^2 + y^2),$$

dire se f si può estendere con continuità a tutto $\mathbb{R}^3$. Studiare la differenziabilità di f.

Esercizio 4

Studiare l'insieme di definizione, la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \int_{-y^2}^{x^2} \frac{\sin(tx)}{t} dt.$$

Esercizio 5

Data la funzione

$$f(x, y) = x^y - 2y + 2x$$

si determini per quale direzione v si ha $D_v f(1, 1) = 2$. Qual è la direzione lungo la quale la funzione cresce di più vicino a $(1, 1)$?

Esercizio 6

Sia $\Phi : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la funzione definita da $\Phi(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$.

a) Calcolare lo jacobiano di Φ.

b) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e definiamo $g = f \circ \Phi$. Dimostrare che, se f è di classe C^1 e

$$x\frac{\partial g}{\partial x} - y\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

allora f dipende solo dalla sua prima variabile su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

c) Dimostrare che, se f è di classe C^1 e risolve l'equazione $(f_x)^2 + 4(f_y)^2 = 1$, allora g è soluzione dell'equazione

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Esercizio 7

Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 2 \text{ e } 0 \le y < 1 - |x^2 - 1|\}$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \arctan(-x^2 + 2xy)$.

1. Dire se f possiede punti critici in $\bar{A}$ e, in caso affermativo, determinarne la natura.
2. Dire se f possiede massimo e minimo assoluto in A e, in caso affermativo, determinarli.

Esercizio 8

Sia $F(x, y, z) = -(x-3)^2 + x\sin(y+1)\ln(z+2) + e^z - 4x + 7$. Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = z(x, y)$ in un intorno del punto $(1, -1, 0)$. Determinare il piano tangente alla superficie nel punto $(1, -1, 0)$.

Esercizio 9

Data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + z^2\right) dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} dy + 2xz dz.$$

Determinare il dominio di definizione di ω e dire se è semplicemente connesso. Verificare se ω è una forma differenziale chiusa. Dimostrare se è una forma esatta e in tal caso calcolarne una primitiva.

Esercizio 10

Date le funzioni $y = \sqrt{\sin x}$ e $y = 2\sin x$, sia $P_0 = (x_0, y_0)$ il punto di intersezione tra le due curve con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Siano poi

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < \frac{\pi}{2},\ \sqrt{\sin x} \le y \le 2\sin x\},$$
$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0,\ 2\sin x \le y \le \sqrt{\sin x}\},$$
$$f(x,y) = \begin{cases} y\cos^4 x & \text{se } (x,y) \in A_1 \\ -y\cos^4 x & \text{se } (x,y) \in A_2. \end{cases}$$

Calcolare

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f(x,y)dxdy.$$

Esercizio 11

Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, x > 0, 0 \le y \le \sqrt{3}x\}.$$

Calcolare il volume del cilindroide di base D e generatrici parallele all'asse z, relativo alla funzione $\sin\sqrt{x^2+y^2}$.

Esercizio 12

Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{(x^2+y^2)(2x^2+4y^2)}{x^3}dxdy,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ \frac{1}{2}x^2 \le y \le x^2\}.$$

Esercizio 13

Verificare il teorema della divergenza per il campo $F(x,y,z) = (x, y^2, yz)$ e il dominio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ |z| \le 2\}$.

Esercizio 14

Dato il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\frac{x^2+x+y^2}{(1+x)^2+y^2}, -\frac{y}{(1+x)^2+y^2}\right)$, calcolare l'integrale $\int_\gamma F$, dove γ è la curva

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$$

orientata da $(1,0)$ a $(0,2)$.

Esercizio 15

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y^3 \cos z, x^3 e^z, -yz^2 \sin x)$$

uscente attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ 0 \leq z \leq \sqrt{5}\}.$$

Esercizio Importante

Sia $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n d\theta$ dimostrare che

i) $a_n = (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n$

ii) $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}$, $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

iii) $a_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2} \dfrac{\pi}{2}, \qquad a_{2n+1} = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$

Sia ora ω_n il volume della sfera di raggio uno in $\mathbb{R}^n$ che denotiamo con $B_n(0,1)$. Verificare che

iv) $volume(B_n(0,R)) = R^n \omega_n$, dove $B_n(0,R)$ è la sfera di raggio R in $\mathbb{R}^n$.

v) $\omega_{n+1} = \displaystyle\int_{B_{n+1}(0,1)} 1dx = \omega_n \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n/2} dt = 2\omega_n \int_0^{\pi/2} (1 \sin^2\theta)^{n/2} \cos\theta d\theta = 2\omega_n a_{n+1}$

vi) $\omega_n = 2^n \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i, \qquad \omega_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}, \qquad \omega_{2n+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1}$