

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)*Quinta settimana - I Semestre***Esercizio 1**

Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{px + qy}{x^2 + y^2} dx + \frac{rx + sy}{x^2 + y^2} dy.$$

Dire per quali valori di p , q , r , s la forma ω è esatta nel suo dominio di definizione e in tal caso calcolarne le primitive.

Esercizio 2

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^4} dx + \frac{a(y)}{x^2 + y^4} dy.$$

Dimostrare che esistono funzioni $a(y)$ per cui tale forma è chiusa. Se ora $a(y)$ è una di tali funzioni dire se la forma è anche esatta. In tal caso calcolare una primitiva di ω .

Esercizio 3

Si consideri il campo vettoriale piano $\mathbf{F} = \sqrt{\frac{y+2}{x+3}}\mathbf{i} + \sqrt{\frac{x+3}{y+2}}\mathbf{j}$. Determinare l'insieme di definizione di \mathbf{F} , dire se il campo \mathbf{F} è irrotazionale. Stabilire se il campo \mathbf{F} è conservativo e, in caso affermativo, calcolare la funzione potenziale. Calcolare infine, il lavoro del campo \mathbf{F} sulla curva

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\}$$

orientata in senso antiorario.

Esercizio 4

Calcolare i seguenti integrali doppi sui domini indicati

$$\begin{aligned} \iint_D |xy| dx dy & \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}, \\ \iint_D y dx dy & \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, 2x \geq y^2\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5

Detto D l'insieme del primo quadrante delimitato dalla parabola $x = y^2$ e dalla retta $x = 1$, calcolare

$$\iint_D x \sin y dx dy.$$

Esercizio 6

Sia T il trapezoide limitato dagli assi x e y , dalla parallela all'asse y di equazione $x = \frac{1}{\pi}$ e dal grafico della funzione

$$y = \begin{cases} 1 + x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{per } 0 < x < \frac{1}{\pi} \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

sull'intervallo $[0, \frac{1}{\pi}]$. Calcolare l'integrale

$$\int \int_T xy \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx dy.$$

Esercizio 7

Dopo aver verificato l'integrabilità di $f(x, y) = \frac{\sin y^2}{y}$ sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 < y \leq \sqrt{\pi}\}$, calcolare $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Esercizio 8

Disegnare l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], -x^4 \leq y \leq 2x^2\}$ e calcolarne l'area.

Esercizio 9

Calcolare l'integrale esteso al disco di centro l'origine e raggio 2 della funzione $f(x, y) = x \cos(y^2 + y^3)$.

Esercizio 10

Data la funzione $f(x, y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, si determini α in modo tale che il piano tangente in $(0, 1)$ sia perpendicolare alla retta $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$.

Esercizio 11

Data

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, f è continua, ha derivate parziali ed è differenziabile.

Esercizio 12

Calcolare l'area della regione A del piano $y = x$ compresa tra l'asse z e la retta di equazione $x = y = 1$ e compresa tra il piano $z = 0$ e il grafico della funzione $z = x + y^3$.

Esercizio 13

Calcolare la lunghezza della seguente curva (detta asteroide) con sostegno nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}, a > 0\}$$