CdL in Matematica e Fisica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Settima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Sia $0 \leq a \leq 1$ e si consideri l'insieme di $\mathbb{R}^2$, $D(a) = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \geq 9a^4,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 4a\}$. Calcolare l'area di $D(a)$ e dire per quali valori di a tale area è massima.

Esercizio 2

Calcolare

$$\int_D \frac{x}{1+y} dxdy,$$

dove D è il cerchio unitario.

Esercizio 3

Calcolare

$$\int_{\partial S^+} xy^2 dx - (x+y)dy$$

dove $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq x\}$.

Esercizio 4

Calcolare

$$\iiint_V (x+y+z)^2 dxdydz$$

dove V é la parte comune del paraboloide $2az \geq x^2+y^2$ $(a > 0)$ e della sfera $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$.

Esercizio 5

Calcolare l'area della seguente superfici di parametrizzazione $\vec{r}(u, v) = 2b \cos u\vec{\imath} + b \sin u\vec{\jmath} + v\vec{k}$ con $0 \leq z \leq x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 6

Si calcoli l'area della frontiera dei seguenti insiemi

a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}, y \geq 0\}$;

b) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \min(1 + z, \sqrt{1 - z})\}$;

c) L'intersezione di due sfere di $\mathbb{R}^3$ di raggio 2 aventi centri a distanza 3.

Esercizio 7

Calcolare i seguenti integrali superficiali

a) $\displaystyle\int_\Sigma z d\sigma$, dove Σ è il grafico della funzione $z = xy$ sull'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$;

b) $\displaystyle\int_\Sigma y^2 d\sigma$, dove Σ è il grafico della funzione $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ interno al cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$.

Esercizio 8

Calcolare il flusso del rotore del seguente campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (xe^{z^2 \log(1+z)}, x^2 + y, z^3 + xy)$$

uscente attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 \ z^2 = -x^2 - y^2 + 2y\}.$$

Esercizio 9

Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0, 0, z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x + y \geq 0\}$.

Esercizio 10

Calcolare la circuitazione

$$\int_\gamma < \vec{F}, \vec{T} > ds,$$

dove $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ e γ è il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = y^2\},$$

orientato in modo che la percorrenza sia vista in senso antiorario dall'alto dell'asse z. Confermare il risultato ottenuto usando la formula di Stokes.

Esercizio 11

Sia $\vec{F}(x,y,z) = (x, x+z, x+y+z)$. Sia C la curva ottenuta intersecando il piano $z = y$ con il cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Calcolare

$$\int_C < \vec{F}, \vec{T} > ds$$

sia direttamente sia usando opportunamente la formula di Stokes.

Esercizio 12

Verificare il teorema della divergenza per il campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^4, y, z+1)$ e il dominio

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)\}.$$

Esercizio 13

Verificare il teorema di Stokes per la regione $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, \mid |y| \leq 1, \ 2x + z = 2\}$ orientata verso l'alto e il campo vettoriale $F(x,y,z) = (x, x, x^2)$.

Esercizio 14

Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

provare che essa definisce implicitamente in un intorno di $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ una funzione $y = y(x)$ e provare che $y(x)$ ha in $x = 2^{1/3}$ un estremo relativo e determinarne la natura.

Esercizio 15

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy^2 + y + \sin xy + 3(e^x - 1).$$

a) Verificare che in un intorno di $(0,0)$ l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.

b) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 3x}{x}.$$

Esercizio 16

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = -xe^y + 2y - 1.$$

a) Verificare che nei punti $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x_0 \leq 0$ e tali che $f(P_0) = 0$, l'equazone $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di P_0 un'unica funzione continua $y = y(x)$.

b) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della funzione $y = y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x, y) = 0$ in un intorno di $(0, \frac{1}{2})$.

c) Trovare tutti i punti $Q = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tali che $f(Q) = 0$ e f non soddisfa in Q le ipotesi del teorema del Dini per l'esplicabilità di y in funzione di x.

Esercizio 17

Determinare la natura dei punti critici della funzione $z = z(x, y)$ definita implicitamente dall'equazione: $f(x, y, z) = x^2y - z^3 + xyz - 7 = 0$

Esercizio 18

Si verifichi che l'equazione $f(x, y, z) = x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 = 0$ definisce in un intorno del punto $P = (-1, 0, 0)$ una funzione $g(x, z)$. Determinare l'equazione del piano tangente in P al grafico della funzione $y = g(x, z)$.