CdL in Matematica e Fisica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Ottava settimana - I Semestre

Esercizio 1

Calcolare l'area della regione A del piano $y = x$ compresa tra l'asse z e la retta di equazione $x = y = 1$ e compresa tra il piano $z = 0$ e il grafico della funzione $z = x + y^3$.

Esercizio 2

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $F(x, y, z) = (x + z, z + y, y + x)$ sulla curva intersezione tra il cilindro $x^2 + z^2 = 1$ ed il piano $x + y + z = 1$.

Esercizio 3

Sia γ la curva chiusa cha delimita la parte di piano compresa tra le curve

$$\gamma : \begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Si consideri il campo vettoriale piano $\vec{F} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ e si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma F ds$.

Esercizio 4

Verificare il teorema della divergenza per il dominio $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 2,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 3\}$ e il campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Esercizio 5

Verificare il teorema della divergenza per il campo $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ con $a, b, c > 0$.

Esercizio 6

Verificare il teorema di Stokes $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 2,\ x^2 = y^2 + z^2\}$

Esercizio 7

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{F} = (y + 3x, 2y - x)$ per far compiere a una particella un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ in senso orario.

Esercizio 8

Trovare i punti di massimo e di minimo delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y \qquad f(x,y) = e^{-x^2}(2xy - y^2)$$
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

Esercizio 9

Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^{-3}y^{-2}$ e sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo di f in A. Calcolare, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di f in A.

Esercizio 10

Trovare massimi e minimi in $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ della funzione $f(x,y) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\sin y} e^{t^2}\,dt$.

Esercizio 11

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y) = (|x| + y)e^{-xy}$ studiarne la continuità, derivabilità e differenziabilità. Trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi . Dire se f e limitata e calcolare, se esiste, il limite di f per $\|(x,y)\| \to \infty$.

Esercizio 12

Dimostrare che l'equazione

$$y^5 + y - xe^x = 0$$

definisce una ed una sola funzione $y = f(x)$ su tutto l'asse reale. Verificare inoltre che:

a) $xf(x) > 0$, per ogni $x \neq 0$, $f(0) = 0$;

b) per $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$;

c) per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$;

d) $x = -1$ è un punto di minimo per $f(x)$.

Si tracci un grafico qualitativo di $y = f(x)$.

Esercizio 13

Dopo aver verificato che l'equazione

$$f(x,y,u,z) = \ln xy + z(x-y) + u^2 + z^2 - 1 = 0$$

definisce in un intorno del punto $P = (1,1,0,1)$ un'unica funzione $z = z(x,y,u)$, si calcoli $\nabla z(1,1,0)$. L'equazione definisce anche un'unica funzione $u = u(x,y,z)$?

Esercizio 14

Studiare nelle vicinanze del punto $(1,1)$ l'insieme $\{(x,y) : x \sin x - y \sin y = 0\}$.