

CdL in Fisica - A.A. 2015-2016
Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Decima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

Se ne calcoli poi la somma.

Esercizio 2

Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{x}{n}} & \quad \text{nell'intervallo } (0, +\infty); \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!} & \quad \text{in } \mathbb{R}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^{2n} + y^{2n}) & \quad \text{in } \mathbb{R}^2; \\ \sum_{n=1}^{\infty} [e^{(2|\sin x|)^n} - 1] & \quad \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Date le funzioni definite in $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\arctan(|x|^n)}{n},$$

1. si trovi l'insieme di convergenza E della successione di funzioni f_n e si dica se la convergenza è uniforme;
2. calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{10} f_n(x) dx$;
3. studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Esercizio 4

Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

1. Determinare l'insieme C di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e totalmente in C .
3. Fissato $a > 0$, verificare che la somma della serie è derivabile in $[a, +\infty]$.

Esercizio 5

Determinare gli insiemi di convergenza semplice, assoluta e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n \ln n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 6

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

- a) $u' - \frac{u}{1+e^x} = \sin x$;
- b) $y' = (x+y)^2 - x - y - 1$;
- c) $y'' - \frac{y'}{\sin x \cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$;

Esercizio 7

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y+1}{t^2+1}.$$

1. Risolvere il problema di Cauchy con $y(0) = 0$.
2. Risolvere il problema di Cauchy con $y(0) = -1$.
3. Dimostrare che tutte le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale hanno un punto di flesso in $t = \frac{1}{2}$.

Esercizio 8

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3 \sqrt{1 - y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

stabilire se si ha esistenza ed unicità locale di soluzioni e trovare l'intervallo massimale di soluzione.

Esercizio 9

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$$

sapendo che $\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

- (a) Dimostrare che f è di classe C^∞ e calcolarne l'estremo superiore e l'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$.
- (b) Trovare i punti di massimo e minimo di f sul cerchio $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 10

Disegnare l'insieme E definito dal vincolo

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$$

e calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x, y) = 3x + y$ su tale insieme E .

Esercizio 11

Consideriamo $\Gamma = \{(x, y) \mid y^3 = x^2, \quad -20 \leq x \leq 20\}$. Dire in quali punti di Γ si può applicare il teorema del Dini per dimostrare che Γ è localmente una curva di classe C^1 . Calcolare la lunghezza di Γ . Trovare il massimo e il minimo su Γ della funzione $f(x, y) = y^3 + 3xy$.

Esercizio 12

Data la funzione $f(x, y, z) = x + y + z$, determinare i suoi punti di massimo e di minimo relativo e assoluti sull'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, (z - 1)^2 \geq x^2 + y^2\}.$$