CdL in Matematica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Decima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-\sin(xy)}{x^2y^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-x\sin(xy)-1}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x+\sin y)-(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Esercizio 2

Scrivere il polinomio di Taylor, relativo al punto $(0,0)$, fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:

$$f(x,y)=(1+x)^y \qquad f(x,y)=x\cos(x+y)$$

Esercizio 3

Scrivere i polinomi di Taylor di ordine n relativi al punto $(0,0)$ delle funzioni e^{xy}, e^{x+y}, $x\cos y$, $x^2\sin(x+y)$.

Esercizio 4

Trovare i punti di massimo e di minimo delle seguenti funzioni:

$$f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2 \qquad f(x,y)=3x^4+y^4+4x^3y$$

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=y^2x^3-3y^2x-y^4$$

Esercizio 5

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} e^z-(x+y)\sin(x+y)+\log(1+x+z)-1=0 \\ z\tan(xy)+\log(1+x)+\arctan(y-x)=0 \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ in un intorno dell'origine come una curva. Dare lo sviluppo al primo e al secondo ordine della relativa parametrizzazione.

Esercizio 6

Disegnare l'insieme E definito dal vincolo

$$g(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$$

e calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x,y) = 3x + y$ su tale insieme E.

Esercizio 7

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$$

sapendo che $\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

(a) Dimostrare che f è di classe C^∞ e calcolarne l'estremo superiore e l'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$.

(b) Trovare i punti di massimo e minimo di f sul cerchio $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 8

Consideriamo $\Gamma = \{(x,y) \mid y^3 = x^2, \quad -20 \leq x \leq 20\}$. Dire in quali punti di Γ si può applicare il teorema del Dini per dimostrare che Γ è localmente una curva di classe C^1. Calcolare la lunghezza di Γ. Trovare il massimo e il minimo su Γ della funzione $f(x,y) = y^3 + 3xy$.

Esercizio 9

Data la funzione $f(x,y,z) = x + y + z$, determinare i suoi punti di massimo e di minimo relativo e assoluti sull'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ (z-1)^2 \geq x^2 + y^2\}.$$