

CdL in Fisica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Undicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

a) $xy' = y(\ln y - \ln x);$

b) $y' = (x - 2y)^2 + \frac{1}{2}(x - 2y)^4 + 1;$

c) $\frac{1}{3}y' - \frac{y}{\sin x \cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \sqrt[3]{y^2};$

d) $3y' - \frac{y}{1 + \cos x} = -\frac{\sin x + 1}{y^2};$

e) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0.$

f) $3y' + \frac{y}{2e^{-x} - 1} = -(e^{-x} + 1)y^4.$

Esercizio 2

Dopo aver verificato che $\bar{y}(x) = x$ è un integrale particolare della seguente equazione di Riccati

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2},$$

se ne calcoli l'integrale generale.

Esercizio 3

Sia data l'equazione differenziale

$$y' = g\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \quad (1)$$

con $ab' - a'b \neq 0$. Detto (x_0, y_0) il punto di intersezione delle due rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, verificare che la sostituzione

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0$$

trasforma l'equazione (1) nell'equazione omogenea

$$\frac{d\eta}{d\xi} = g\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a' + b'\frac{\eta}{\xi}}\right).$$

Utilizzando questo metodo, risolvere poi le seguenti equazioni differenziali

$$\text{a) } y' = \frac{x + 2y - 5}{2x + y - 1};$$

$$\text{b) } y' = \frac{4x - 3y - 1}{3x - 2y - 1}.$$

Esercizio 4

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y'(1 + (y')^2) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 3y' + \frac{y}{(2e^{-x} - 1)} = -(e^{-x} + 1)y^4. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Esercizio 5

Provare che le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = (u - 1) \arctan t \\ u(0) = \lambda \end{cases}$$

sono convesse se $\lambda > 1$ e concave se $\lambda < 1$.

Esercizio 6

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(t) \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Suggerimento: dimostrare che l'eventuale soluzione è periodica.

Esercizio 7

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{t^3 + y^3}{ty^2} \\ y(e) = e\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

stabilire se si ha esistenza ed unicità locale di soluzioni e trovare l'intervallo massimale di esistenza di soluzione.

Esercizio 8

Discutere al variare di α il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y - 1)(y - 2) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Esercizio 9

Studiare al variare di $\alpha \geq 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t \sqrt{|y|} \\ y(0) = \alpha^2, \end{cases}$$

scrivere le soluzioni esplicite e tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

Esercizio 10

Trovare la soluzione e l'intervallo di esistenza massimale della seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \frac{1 + 3t^2}{1 + \tan^2 y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 11

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzioni seguenti:

$$f_n(x) = n(\sin nx)e^{-nx} \quad f_n(x) = \sqrt{(\sin x)^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Esercizio 12

Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(\ln n)^{nx}}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n} - e^{n/x}}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right).$$

Esercizio 13

Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Esercizio 14

Dati gli insiemi $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ e le funzioni $f(x, y, z) = 2x + y + z$, $g(x, y, z) = x + y + z$, calcolare $f(A)$ e $g(B)$.

Esercizio 15

Calcolare l'estremo inferiore e superiore della funzione $f(x, y) = \frac{\sqrt{|x+y|}}{e^{x^2+y^2}}$ sul cerchio $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

Esercizio 16

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{F} = (y + 3x, 2y - x)$ per far compiere a una particella un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ in senso orario.