CdL in Matematica - A.A. 2015-2016

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Undicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Dati gli insiemi $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ e le funzioni $f(x,y,z) = 2x + y + z$, $g(x,y,z) = x + y + z$, calcolare $f(A)$ e $g(B)$.

Esercizio 2

Calcolare l'estremo inferiore e superiore della funzione $f(x,y) = \frac{\sqrt{|x+y|}}{e^{x^2+y^2}}$ sul cerchio $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

Esercizio 3

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{F} = (y + 3x, 2y - x)$ per far compiere a una particella un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ in senso orario.

Esercizio 4

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \leq x^2 \\ y - x^2 & \text{se } y > x^2 \\ y + x^2 & \text{se } y < -x^2 \end{cases}$.

Verificare che

a) $F(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

b) $F(x,y)$ definisce implicitamente infinite funzioni di x in un intorno di $x_0 = 0$, passanti per l'origine degli assi.

c) Spiegare perché a) e b) non sono in contraddizione con il teorema del Dini.

Esercizio 5

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} x + \tan(x+y) + \log(1 + x + z) = 0 \\ \tan y + yz + \arctan(x+y) = 0 \end{cases}$$

Verificare che, in un intorno dell'origine, si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza. Esprimere tale parametrizzazione al primo e al secondo ordine.

Esercizio 6

Dimostrare che l'equazione $(y-1) + x\arctan(x+z) + \cos z = 0$ definisce in un intorno di $(0,0,0)$ una ed una sola funzione $y = g(x,z)$. Stabilire la natura del punto $(0,0)$ per la funzione $g(x,z)$.

Esercizio 7

Sia $f(x,y) = (x+y)^2$ e sia $E = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$. Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f su E e calcolare $\displaystyle\int_E f(x,y)dxdy$

Esercizio 8

Determinare massimi e minimi delle funzioni $f(x,y) = x^4 - x^6 + (y - e^x)^2 \log(2 + x^2)$, $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

Esercizio 9

Indicato con σ il segmento $\{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y = 1\}$, si consideri la funzione

$$f(x,y) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + y \log\left(1 + \frac{1}{y}\right).$$

(a) Provare che $\inf\limits_{\sigma} f = \log 2$, $\sup\limits_{\sigma} f = \log 3$.

(b) Generalizzare il risultato al caso $f(x,y) = g(x) + g(y)$, con $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, di classe C^2 e strettamente concava.

Esercizio 10

Sia $f(x,y)$ una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Dimostare che, se f é nulla nell'origine, esistono due funzioni $A(x,y)$ e $B(x,y)$ continue su $\mathbb{R}^2$ e tali che

$$f(x,y) = xA(x,y) + yB(x,y) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suggerimento: si consiglia di considerare la funzione $g(t) = f(tx, ty)$.

Esercizio 11

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzione seguenti:

1. $f_n(x) = nxe^{-nx}$
2. $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$
3. $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx^2}$
4. $f_n(x) = \dfrac{3x + n}{x + n} \quad x \geq 0$
5. $f_n(x) = n(\sin nx)e^{-nx}$
6. $f_n(x) = \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{1}{n^2}}$
7. $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x} \quad x \in [0, \pi]$
8. $f_n(x) = (\sin x)^n \quad x \in [0, \pi]$