

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)*Dodicesima settimana - I Semestre***Esercizio 1**

Trovare l'integrale generale dei seguenti sistemi di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases} \quad \begin{cases} u'' = 2u - 3v \\ v'' = u - 2v \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + z \\ \dot{y} = -x + 2y - 5z \\ \dot{z} = -x + y + 2z \end{cases}$$

Esercizio 2Trovare l'integrale generale del seguente sistema di equazioni differenziali, $y'(t) = Ay(t)$, dove A la matrice data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 6y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = 3y + z \end{cases} \quad (x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 0).$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = x + y + z \end{cases} \quad (x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$$

Esercizio 4Determinare tutti gli α, β per il quali

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_i(t)}{t^\alpha e^{\beta t}} = 0, \quad i = 1, \dots, 3,$$

dove $x_i(t)$ sono le componenti del vettore $X(t)$ soluzione di

$$X'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X(t) \quad X(0) = (1, 2, 0)$$

Esercizio 5

Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

- a) $y'' - 3y' + 2y = e^x$
- b) $y'' + 3y' = 9x^2$
- c) $y'' - 2y' + 2y = e^x(3\cos^2 x + \sin x - 1)$
- d) $y''' - 3y'' + 2y' = 1$
- e) $y''' - 2y'' + y' = e^x + 2x$
- f) $y''' - 2y'' + 2y' = e^x \cos x + e^{2x} + 2$
- g) $y^{(4)} - 3y''' + 4y'' - 2y' = x + 4$
- h) $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^{2x}}$
- i) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 2x + \sin x + \cos x$.

Esercizio 6

Dire per quali valori del parametro reale a ogni soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - ay = e^x$$

soddisfa la relazione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)e^{-2x} = 0.$$

Esercizio 7

Dati i seguenti sistemi autonomi individuarne i punti critici e classificarli.

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \arctan(y - x^2) \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = x - 5y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = x - 5y^2 \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = \sin(\pi(y + x)) \\ \dot{y} = x + \arctan x \end{cases} & \begin{cases} \dot{x} = 2y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -2x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \end{array}$$

Esercizio 8

Sia λ un numero reale. Trovare, in dipendenza da λ , tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale,

$$y'' + \lambda y' + y = (t^2 - 1)e^t.$$

Esercizio 9

Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{array}{ll} y'' - 3y' + 2y = \sin 5t & y'' + y' = \frac{1}{1 + e^{2x}} \\ y' = e^{y/x} + y/x & y' = \sin x \sqrt{1 - y^2} \end{array}$$