Corso di Laurea in Matematica A.A. 2015-2016

**Esercizi di Analisi Matematica B** (Donatelli)

*Dodicesima settimana*

## Esercizio 1

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzione seguenti:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+(3nx)^2} \qquad f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2} \qquad f_n(x) = \sin\frac{x}{n^2+|\sin x|}.$$

## Esercizio 2

Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ gli insiemi di convergenze puntuale ed uniforme della seguente successione di funzione

$$f_n(x) = \left(\sqrt{1+(nx)^\alpha} - \sqrt{(nx)^\alpha}\right) \qquad x > 0.$$

## Esercizio 3

Data la successione di funzione

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$$

verificare se

1. la successione converge uniformemente per ogni $x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \frac{d}{dx}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

Motivare le risposte.

## Esercizio 4

Sia data la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^\alpha t e^{-nt} \qquad n \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) dimostrare che $f_n(t)$ converge a 0 puntualmente in $[0,+\infty)$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) dimostrare che $f_n$ converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[r,+\infty)$ con $r > 0$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) dimostrare che $f_n$ converge uniformemente in $[0,1]$ se e solo se $\alpha < 1$;

d) dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt.$$

## Esercizio 5

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ e in $[a, 2]$ con $a > 0$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n^3}{8}(x + \frac{1}{n})^3 & \text{se } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

## Esercizio 6

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$.

## Esercizio 7

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1 + y^2} dy \qquad n \geq 1,$$

provare che $f_n$ è continua su $\mathbb{R}$ per ogni $n$ e studiare la convergenza puntuale e uniforme di $f_n$.

## Esercizio 8

Siano $a > 0$, $b > 1$. Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0, b]$ della successione di funzioni $(f_n)$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} an^2x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b}n^2x + \frac{ab}{b-1}n & \text{se } \frac{1}{n} \leq x < \frac{b}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{b}{n} \leq x \leq b. \end{cases}$$

(Suggerimento: dopo aver studiato la convergenza puntuale, studiare la convergenza di $\int_0^b f_n(x)dx$.)

## Esercizio 9

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0, 1]$ delle successioni

$$f_n(t) = t - \frac{t^n}{n} \qquad \text{e} \qquad f_n'.$$

Verificare poi che non sono verificate le ipotesi per lo scambio tra limite e derivata in $[0, 1]$ e che risulta

$$\frac{d}{dt} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \neq \lim_{n \to +\infty} f_n'(t).$$