

### **Esercizio 1**

Siano  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , verificare che

$$d(x, y) = \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$$

è una metrica su  $\mathbb{R}^n$ .

### **Esercizio 2**

Verificare che

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2| & \text{se } x_1 = x_2 \end{cases}$$

definisce una metrica su  $\mathbb{R}^2$ .

### **Esercizio 3**

Sia  $X$  uno spazio normato, dimostrare che per ogni  $x, y \in X$  vale la diseguaglianza seguente

$$|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|.$$

### **Esercizio 4**

Posto per  $u \in C([0, 2])$

$$\|u\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \int_1^2 |u(x)| dx$$

dire se  $\| \cdot \|$  è una norma in  $C([0, 2])$ .

### **Esercizio 5**

Trovare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti:

$$f(x, y) = \log \frac{x^2 - 1}{1 - y^2} \quad f(x, y) = \sqrt{x \sin \sqrt{x^2 + y^2}} \quad f(x, y) = \arcsin \frac{x + y - 1}{x - y + 1}$$

### **Esercizio 6**

Trovare le linee di livello delle funzioni:

$$f_1(x, y) = x^2 - x^3 \quad f_2(x, y) = \frac{1 + xy}{x^2}.$$

Disegnare il grafico della funzione  $f_1$ .

## Esercizio 7

Studiare le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

Dire se esiste un valore massimo e minimo della funzione.

## Esercizio 8

Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x(y-2)(x-2)^3}{(y-2)^2 + |x-2|} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy} & \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(xy) \left( \frac{x^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

## Esercizio 9

Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione:

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & f_4(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ f_5(x, y) &= \begin{cases} \frac{y^3 x}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & f_6(x, y) &= \sqrt{xy(xy - 1)} \end{aligned}$$

## Esercizio 10

Stabilire se la seguente funzione

$$f(x, y) = \frac{[(x-1)^3 y + 2xy + 4y^2]^{7/3}}{[\sqrt{(x-1)^2 + y^2}]^{2/3}}$$

è prolungabile con continuità nel punto  $(1, 0)$  ed in caso affermativo stabilire quale valore deve assumere il prolungamento di  $f$  nel punto  $(1, 0)$ .