

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Prima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, verificare che

$$d(x, y) = \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$$

è una metrica su \mathbb{R}^n .

Esercizio 2

Verificare che

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2| & \text{se } x_1 = x_2 \end{cases}$$

definisce una metrica su \mathbb{R}^2 .

Esercizio 3

Sia X uno spazio normato, dimostrare che per ogni $x, y \in X$ vale la disuguaglianza seguente

$$|||x| - |y|| \leq \|x - y\|.$$

Esercizio 4

Posto per $u \in C([0, 2])$

$$\|u\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \int_1^2 |u(x)| dx$$

dire se $\| \cdot \|$ è una norma in $C([0, 2])$.

Esercizio 5

Trovare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti:

$$f(x, y) = \log \frac{x^2 - 1}{1 - y^2} \quad f(x, y) = \sqrt{x \sin \sqrt{x^2 + y^2}} \quad f(x, y) = \arcsin \frac{x + y - 1}{x - y + 1}$$

Esercizio 6

Trovare le linee di livello delle funzioni:

$$f_1(x, y) = x^2 - x^3 \quad f_2(x, y) = \frac{1 + xy}{x^2}.$$

Disegnare il grafico della funzione f_1 .

Esercizio 7

Studiare le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

Dire se esiste un valore massimo e minimo della funzione.

Esercizio 8

Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x(y-2)(x-2)^3}{(y-2)^2 + |x-2|} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(xy) \left(\frac{x^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

Esercizio 9

Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione:

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 x}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f_6(x, y) = \sqrt{xy(xy - 1)}$$

Esercizio 10

Stabilire se la seguente funzione

$$f(x, y) = \frac{[(x-1)^3 y + 2xy + 4y^2]^{7/3}}{[\sqrt{(x-1)^2 + y^2}]^{2/3}}$$

è prolungabile con continuità nel punto $(1, 0)$ ed in caso affermativo stabilire quale valore deve assumere il prolungamento di f nel punto $(1, 0)$.