

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Seconda settimana - I Semestre

Esercizio 1

Dire se le seguenti funzioni sono continue nel loro insieme di definizione:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y-x^2} & y - x^2 > \sqrt{|x|} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{5/2}|y-1|}{x^4+y^2-2y+1} & (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

Esercizio 2

In che modo può essere definita la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}, \quad x \neq y$$

lungo la retta $y = x$ affinché la funzione ottenuta sia continua in tutto \mathbb{R}^2 ?

Esercizio 3

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in \mathbb{R}^2 delle funzioni seguenti:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} xy e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} x + x^2 y & y \geq 0 \\ \frac{e^{xy}-1}{y} & y < 0 \end{cases} \quad f_4(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{x}{x-y^2}\right) & x \neq y^2 \\ 0 & x = y^2 \end{cases}$$

$$f_5(x, y) = \begin{cases} x e^{-\frac{x}{y^2}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcolare le derivate parziali di $f(x, y)$ in tutti i punti (x, y) del piano. È continua f in $(0, 0)$? Sono continue le derivate parziali in $(0, 0)$? f è differenziabile in $(0, 0)$?

Esercizio 5

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0, 0)$ della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + 2y^2)^\alpha & x > 0 \\ x^2 + 2y^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dimostrare che esiste α_0 tale che f sia continua in $(0, 0)$. Sia ora $\alpha = 0$: dire se f è derivabile e differenziabile.

Esercizio 7

Calcolare la derivata della funzione $z = x^2 - xy - 2y^2$ nel punto $(1, 2)$ in una direzione formante con l'asse delle ascisse un angolo di 60° .

Esercizio 8

Sia $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si calcolino tutte le derivate direzionali $D_v f(x)$, $x \neq 0$ (v vettore di \mathbb{R}^n).