

CdL in Matematica e Fisica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Terza settimana - I Semestre

Esercizio 1

Si consideri l'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ costituito dai punti (x, y, z) che verificano la relazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Si scriva l'equazione del piano tangente ad A nel punto $P = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

Esercizio 2

Sia $f(x) = \|x\|$ definita in $\mathbb{R}^2$ e differenziabile in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Sia $x^0 \neq 0$, si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(x^0, f(x^0))$.

Esercizio 3

Data la funzione $f(x, y) = y^4 e^{3x}$, si determini per quale versore v $D_v f(0, -1)$, è massima e per quale è nulla.

Esercizio 4

Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definita da $f(x, y) = (3x^2 - 2y + xy, \sin(xy))$ è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Scrivere il differenziale nel punto $(1, \pi)$.

Esercizio 5

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità della seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha \frac{e^{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 6

Dimostrare che se $u(x, t)$ è soluzione dell'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

allora u è della forma $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$.

(Suggerimento: scrivere l'equazione delle onde nelle nuove coordinate $(x, t) \rightarrow (\xi, \eta)$ date da $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$).

Esercizio 7

Calcolare la lunghezza della curva di parametrizzazione $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$r(t) = (4 \cos t - \cos(4t), 4 \sin t - \sin(4t)).$$

Esercizio 8

Data la curva parametrizzata da

$$r(t) = (t^2(1+t), t^2(1-t)), \quad t \in [-1, 1]$$

Stabilire se l'arco di curva è continua, chiusa, regolare, determinando gli eventuali punti non regolari. Calcolare la lunghezza della curva. Riparametrizzare la curva per $t \in [0, 1]$ mediante l'ascissa curvilinea.

Esercizio 9

Calcolare le lunghezze delle seguenti curve in forma polare

1. $\rho = a\theta$, con $a > 0$, $\theta \in [0, \bar{\theta}]$ (spirale di Archimede)

2. $\rho = e^{\omega\theta}$, con $\omega \neq 0$, $\theta \in [0, \bar{\theta}]$ (spirale logaritmica)

3. $\rho = 2a(1 - \cos \theta)$, con $a > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (cardioide)

Esercizio 10

Data la curva (γ, r) con $r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \theta),$$

calcolare gli integrali curvilinei

$$\int_{\gamma} xz \, ds, \quad \int_{\gamma} yz \, ds.$$

Esercizio 11

Siano $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Verificare che

a) $\text{rot}(f\mathbf{g}) = \nabla f \wedge \mathbf{g} + f \text{rot } \mathbf{g}$

b) $\text{rot rot } \mathbf{f} = \nabla \text{div } \mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}$.

c) $\text{div}(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{g}$

d) $\text{rot}(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = (\text{div } \mathbf{g})\mathbf{f} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\text{div } \mathbf{f})\mathbf{g} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$

e) $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \wedge (\text{rot } \mathbf{g}) + \mathbf{g} \wedge (\text{rot } \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}$

dove per con il simbolo “ $\cdot$ ” si intende il prodotto scalare tra vettori.