

Esercizio 1

Data la curva (γ, r) con

$$r(t) = \left(\frac{4}{3}t\sqrt{t}, 2\sqrt{2}t, \frac{1}{2}(t+1)^2 \right), \quad t \in [0, 1],$$

calcolare la lunghezza della curva e l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} z \, ds$.

Esercizio 2

Trovare le soluzioni che dipendono solo da $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ dell'equazione $\Delta u = 0$, dove $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Scrivere gli operatori gradiente, divergenza, rotore e laplaciano in coordinate cilindriche.

Esercizio 4

Studiare la continuità, l'esistenza di derivate parziali e la differenziabilità della funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 e^{-\left(\frac{xy}{y-x^2}\right)^2} & y \neq x^2 \\ 0 & y = x^2. \end{cases}$$

Esercizio 5

Dire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ la funzione definita per $(x, y) \neq (0, 0)$ da

$$f(x, y) = \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^4 + y^2}$$

è estendibile con continuità su tutto \mathbb{R}^2 .

Esercizio 6

Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x^3}{x^4 + y^4} dx + \frac{y^3}{x^4 + y^4} dy + (\tan z + 1) dz.$$

Verificare che si tratta di una forma differenziale chiusa. Dimostrare a priori se è una forma esatta e in tal caso calcolarne una primitiva. Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è il segmento che va da $(1, 1, -\frac{\pi}{4})$ a $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt[4]{31}}{2}, \frac{\pi}{4})$.

Esercizio 7

Date le seguenti forme differenziali:

$$\omega(x, y) = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2 - 1} \quad \text{definita su } \Omega_1 = \{x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\omega(x, y) = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2 - 1} \quad \text{definita su } \Omega_2 = \{x^2 + y^2 > 1\}$$

$$\omega(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^6}} - yz \right) dx + \left(\frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^6}} - xz \right) dy + \left(\frac{3z^5}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^6}} - xy + z \right) dz$$

$$\omega(x, y, z) = x^2 dx + \frac{y}{\sqrt{(z-1)^2 + y^2}} dy + \frac{z-1}{\sqrt{(z-1)^2 + y^2}} dz$$

Verificare che ω è chiusa. Stabilire a priori se si tratta di una forma differenziale esatta, e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 8

Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \omega$, dove $\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x-y)dz$ e γ è la circonferenza intersezione tra la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e il piano $z = y$.

Esercizio 9

Dato il campo vettoriale $F(x, y) = \left(2y - \frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}, \frac{e^y}{1+x^2} \right)$, calcolare $\int_{\gamma} F ds$, dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio uno.

Esercizio 10

Stabilire in quali regioni del piano il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2}, \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2} \right).$$

è conservativo. Calcolare poi, il lavoro del campo sulla curva

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{\sin(\pi t)}{2 + \cos t} + \frac{3}{2}t \right) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

orientata da $(0, 0)$ a $(1, 3/2)$.