CdL in Matematica e Fisica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Nona settimana - I Semestre

Esercizio 1

Trovare i punti di massimo e di minimo delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y \qquad f(x,y) = e^{-x^2}(2xy - y^2)$$
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

Esercizio 2

Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^{-3}y^{-2}$ e sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo di f in A. Calcolare, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di f in A.

Esercizio 3

Trovare massimi e minimi in $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ della funzione $f(x,y) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\sin y} e^{t^2} dt.$

Esercizio 4

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y) = (|x| + y)e^{-xy}$ studiarne la continuità, derivabilità e differenziabilità. Trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi. Dire se f e limitata e calcolare, se esiste, il limite di f per $\|(x,y)\| \to \infty$.

Esercizio 5

Data la funzione
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$
provare che essa definisce implicitamente in un intorno di $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ una funzione $y = y(x)$ e provare che $y(x)$ ha in $x = 2^{1/3}$ un estremo relativo e determinarne la natura.

Esercizio 6

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy^2 + y + \sin xy + 3(e^x - 1).$$

a) Verificare che in un intorno di $(0,0)$ l'equazione $f(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione $y=g(x)$.

b) Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+3x}{x}.$$

Esercizio 7

Determinare la natura dei punti critici della funzione $z=z(x,y)$ definita implicitamente dall'equazione: $f(x,y,z)=x^2y-z^3+xyz-7=0$

Esercizio 8

Si verifichi che l'equazione $f(x,y,z)=x^2+2x+e^y+y-2z^3=0$ definisce in un intorno del punto $P=(-1,0,0)$ una funzione $g(x,z)$. Determinare l'equazione del piano tangente in P al grafico della funzione $y=g(x,z)$.

Esercizio 9

Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y)=-xe^y+2y-1.$$

a) Verificare che nei punti $P_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tali che $x_0\leq 0$ e tali che $f(P_0)=0$, l'equazone $f(x,y)=0$ definisce implicitamente in un intorno di P_0 un'unica funzione continua $y=y(x)$.

b) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della funzione $y=y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y)=0$ in un intorno di $(0,\frac{1}{2})$.

c) Trovare tutti i punti $Q=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ tali che $f(Q)=0$ e f non soddisfa in Q le ipotesi del teorema del Dini per l'esplicabilità di y in funzione di x.

Esercizio 10

Dimostrare che l'equazione
$$y^5+y-xe^x=0$$
definisce una ed una sola funzione $y=f(x)$ su tutto l'asse reale. Verificare inoltre che:

a) $xf(x)>0$, per ogni $x\neq 0$, $f(0)=0$;

b) per $x\to-\infty$, $f(x)\to 0^-$;

c) per $x\to+\infty$, $f(x)\to+\infty$;

d) $x=-1$ è un punto di minimo per $f(x)$.

Si tracci un grafico qualitativo di $y=f(x)$.

Esercizio 11

Dopo aver verificato che l'equazione

$$f(x, y, u, z) = \ln xy + z(x - y) + u^2 + z^2 - 1 = 0$$

definisce in un intorno del punto $P = (1, 1, 0, 1)$ un'unica funzione $z = z(x, y, u)$, si calcoli $\nabla z(1, 1, 0)$. L'equazione definisce anche un'unica funzione $u = u(x, y, z)$?

Esercizio 12

Studiare nelle vicinanze del punto $(1, 1)$ l'insieme $\{(x, y) : x \sin x - y \sin y = 0\}$.

Esercizio 13

Verificare il teorema della divergenza per il campo $F(x, y, z) = (x, y^2, yz)$ e il dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 2\}$.

Esercizio 14

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y^3 \cos z, x^3 e^z, -yz^2 \sin x)$ uscente attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \leq 5,\ 0 \leq z \leq \sqrt{5}\}$.