CdL in Matematica e Fisica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica B e Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Ottava settimana - I Semestre

Esercizio 1

Calcolare l'area della regione A del piano $y = x$ compresa tra l'asse z e la retta di equazione $x = y = 1$ e compresa tra il piano $z = 0$ e il grafico della funzione $z = x + y^3$.

Esercizio 2

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $F(x, y, z) = (x + z, z + y, y + x)$ sulla curva intersezione tra il cilindro $x^2 + z^2 = 1$ ed il piano $x + y + z = 1$.

Esercizio 3

Sia γ la curva chiusa cha delimita la parte di piano compresa tra le curve $\gamma : \begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = -1. \end{cases}$

Si consideri il campo vettoriale piano $\vec{F} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ e si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma F ds$.

Esercizio 4

Verificare il teorema della divergenza per il dominio $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 2,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 3\}$ e il campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Esercizio 5

Verificare il teorema della divergenza per il campo $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ con $a, b, c > 0$.

Esercizio 6

Verificare il teorema di Stokes $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 2,\ x^2 = y^2 + z^2\}$

Esercizio 7

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{F} = (y + 3x, 2y - x)$ per far compiere a una particella un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ in senso orario.

Esercizio 8

Calcolare il flusso del rotore del seguente campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (xe^{z^2\log(1+z)}, x^2+y, z^3+xy)$$

uscente attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 \; z^2 = -x^2 - y^2 + 2y\}$.

Esercizio 9

Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (0,0,z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, \; x+y \geq 0\}$.

Esercizio 10

Calcolare la circuitazione del campo $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, z^2)$ lungo il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4, z = y^2\},$$

orientato in modo che la percorrenza sia vista in senso antiorario dall'alto dell'asse z. Confermare il risultato ottenuto usando la formula di Stokes.

Esercizio 11

Sia $\vec{F}(x,y,z) = (x, x+z, x+y+z)$. Sia C la curva ottenuta intersecando il piano $z = y$ con il cilindro $x^2+z^2 = 1$. Calcolare $\int_C < \vec{F}, \vec{T} > ds$ sia direttamente sia usando opportunamente la formula di Stokes.

Esercizio 12

Verificare il teorema della divergenza per il campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^4, y, z+1)$ e il dominio

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}.$$

Esercizio 13

Verificare il teorema di Stokes per la regione $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, \mid |y| \leq 1, \; 2x+z = 2\}$ orientata verso l'alto e il campo vettoriale $F(x,y,z) = (x,x,x^2)$.

Esercizio 14

Sia $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n d\theta$ dimostrare che

i) $a_n = (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n$

ii) $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}$, $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

iii) $a_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}\dfrac{\pi}{2}, \qquad a_{2n+1} = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}$.