CdL in Fisica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Decima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Tra i rettangoli di perimetro assegnato, determinare quelli di area massima.

Esercizio 2

Determinare la distanza minima che intercorre tra il punto $P = (-1, 0)$ e i punti della curva $y^2 = x^3$.

Esercizio 3

Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x - y + 2z$. Calcolare $f(A)$.

Esercizio 4

Calcolare il massimo e il minimo assoluto per la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x - y$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 3,\ |y| \leq 3,\ |x + y| \leq 4, |x - y| \leq 4\}$.

Esercizio 5

Data la funzione $f(x, y, z) = x + y + z$, determinare i suoi punti di massimo e di minimo relativo e assoluti sull'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ (z - 1)^2 = x^2 + y^2\}$.

Esercizio 6

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$$

sapendo che $\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

(a) Dimostrare che f è di classe C^∞ e calcolarne l'estremo superiore e l'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$.

(b) Trovare i punti di massimo e minimo di f sul cerchio $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 7

Data la funzione $f(x, y, z) = x + y + z$, determinare i suoi punti di massimo e di minimo relativo e assoluti sull'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ (z - 1)^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

Esercizio 8

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

Esercizio 9

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $(0,+\infty)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, della successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt{1+(nx)^\alpha} - \sqrt{(nx)^\alpha}$.

Esercizio 10

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ e in $[a,2]$ con $a > 0$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n^3}{8}(x+\frac{1}{n})^3 & \text{se } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Esercizio 11

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzione seguenti:

11a) $f_n(x) = nxe^{-nx}$

11b) $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$

11c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$

11d) $f_n(x) = \dfrac{3x+n}{x+n} \quad x \geq 0$

11e) $f_n(x) = n(\sin nx)e^{-nx}$

11f) $f_n(x) = \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{1}{n^2}}$

11g) $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x} \quad x \in [0,\pi]$

11h) $f_n(x) = (\sin x)^n \quad x \in [0,\pi]$