

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Undicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Disegnare l'insieme E definito dal vincolo

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$$

e calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x, y) = 3x + y$ su tale insieme E .

Esercizio 2

Dati gli insiemi $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ e le funzioni $f(x, y, z) = 2x + y + z$, $g(x, y, z) = x + y + z$, calcolare $f(A)$ e $g(B)$.

Esercizio 3

Calcolare l'estremo inferiore e superiore della funzione $f(x, y) = \frac{\sqrt{|x+y|}}{e^{x^2+y^2}}$ sul cerchio $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

Esercizio 4

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{F} = (y + 3x, 2y - x)$ per far compiere a una particella un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ in senso orario.

Esercizio 5

Consideriamo $\Gamma = \{(x, y) \mid y^3 = x^2, -20 \leq x \leq 20\}$. Dire in quali punti di Γ si può applicare il teorema del Dini per dimostrare che Γ è localmente una curva di classe C^1 . Calcolare la lunghezza di Γ . Trovare il massimo e il minimo su Γ della funzione $f(x, y) = y^3 + 3xy$.

Esercizio 6

Sia data la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^\alpha t e^{-nt} \quad n \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) dimostrare che $f_n(t)$ converge a 0 puntualmente in $[0, +\infty)$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;
- b) dimostrare che f_n converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[r, +\infty)$ con $r > 0$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;
- c) dimostrare che f_n converge uniformemente in $[0, 1]$ se e solo se $\alpha < 1$;
- d) dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$.

Esercizio 7

Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale e calcolare la somma della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

Esercizio 8

Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{x}{n}} & \quad \text{nell'intervallo } (0, +\infty); \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!} & \quad \text{in } \mathbb{R}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^{2n} + y^{2n}) & \quad \text{in } \mathbb{R}^2; \\ \sum_{n=1}^{\infty} [e^{(2|\sin x|)^n} - 1] & \quad \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 9

Date le funzioni definite in $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\arctan(|x|^n)}{n},$$

1. si trovi l'insieme di convergenza E della successione di funzioni f_n e si dica se la convergenza è uniforme;
2. calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{10} f_n(x) dx$;
3. studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Esercizio 10

Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

1. Determinare l'insieme C di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e totalmente in C .
3. Fissato $a > 0$, verificare che la somma della serie è derivabile in $[a, +\infty]$.

Esercizio 11

Determinare gli insiemi di convergenza semplice, assoluta e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n \ln n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$