CdL in Matematica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Undicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Disegnare l'insieme E definito dal vincolo

$$g(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$$

e calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x,y) = 3x + y$ su tale insieme E.

Esercizio 2

Dati gli insiemi $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ e le funzioni $f(x,y,z) = 2x + y + z$, $g(x,y,z) = x + y + z$, calcolare $f(A)$ e $g(B)$.

Esercizio 3

Calcolare l'estremo inferiore e superiore della funzione $f(x,y) = \frac{\sqrt{|x+y|}}{e^{x^2+y^2}}$ sul cerchio $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

Esercizio 4

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{F} = (y + 3x, 2y - x)$ per far compiere a una particella un giro dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ in senso orario.

Esercizio 5

Consideriamo $\Gamma = \{(x,y) \mid y^3 = x^2, \quad -20 \leq x \leq 20\}$. Dire in quali punti di Γ si può applicare il teorema del Dini per dimostrare che Γ è localmente una curva di classe C^1. Calcolare la lunghezza di Γ. Trovare il massimo e il minimo su Γ della funzione $f(x,y) = y^3 + 3xy$.

Esercizio 6

Date le funzioni

$$f(x,y,z) = \tan x + \sin(y + z - x) + \cos(xyz) - 1 = 0 \qquad g(x,y,z) = \log(1 + 4xyz) + \arcsin(x + y)$$

si consideri l'insieme

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0, g(x,y,z) = 0\}.$$

Dimostrare che in un intorno dell'origine si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza, in particolare $x = x(y)$, $z = z(y)$. Trovare tale parametrizzazione con un errore $o(y)$ e $o(y^2)$.

Esercizio 7

Sia Γ il luogo di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} e^z - (x+y)\sin(x+y) + \log(1+x+z) - 1 = 0 \\ z\tan(xy) + \log(1+x) + \arctan(y-x) = 0 \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $x = x(z),\ y = y(z)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $z = 0$.

Esercizio 8

Sia Γ il luogo di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} (x+y)\sin(x+y) + e^{z+y} + \log(1+zx) = 1 \\ (z+y)e^{z+y} + \sin(x+y) + \log(1+xy) = 0. \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $x = x(y),\ z = z(y)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $y = 0$. Si scrivano le equazioni della retta tangente e del piano normale alle curva $x = x(t)$, $y = t$, $z = z(t)$.

Esercizio 9

Trovare i punti di massimo e di minimo delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \qquad f(x,y) = 3x^4 + y^4 + 4x^3 y$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = y^2x^3 - 3y^2x - y^4$$

Esercizio 10

Sia Γ il luogo di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} e^z - (x+y)\sin(x+y) + \log(1+x+z) - 1 = 0 \\ z\tan(xy) + \log(1+x) + \arctan(y-x) = 0 \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ in un intorno dell'origine come una curva. Dare lo sviluppo al primo e al secondo ordine della relativa parametrizzazione.