CdL in Fisica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Dodicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

a) $u' - \dfrac{u}{1+e^x} = \sin x$;

b) $y' = (x+y)^2 - x - y - 1$;

c) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

d) $y' = (x-2y)^2 + \dfrac{1}{2}(x-2y)^4 + 1$;

c) $y'' - \dfrac{y'}{\sin x \cos x} = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$;

f) $\dfrac{1}{3}y' - \dfrac{y}{\sin x \cos x} = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\sqrt[3]{y^2}$;

g) $3y' - \dfrac{y}{1+\cos x} = -\dfrac{\sin x + 1}{y^2}$;

h) $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

i) $3y' + \dfrac{y}{2e^{-x}-1} = -(e^{-x}+1)y^4$.

Esercizio 2

Dopo aver verificato che $\bar{y}(x) = x$ è un integrale particolare della seguente equazione di Riccati

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2},$$

se ne calcoli l'integrale generale.

Esercizio 3

Sia data l'equazione differenziale

$$y' = g\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \tag{1}$$

con $ab' - a'b \neq 0$. Detto (x_0, y_0) il punto di intersezione delle due rette $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$, verificare che la sostituzione

$$\xi = x - x_0, \qquad \eta = y - y_0$$

trasforma l'equazione (1) nell'equazione omogenea

$$\frac{d\eta}{d\xi} = g\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a' + b'\frac{\eta}{\xi}}\right).$$

Utilizzando questo metodo, risolvere poi le seguenti equazioni differenziali

a) $y' = \dfrac{x + 2y - 5}{2x + y - 1}$;

b) $y' = \dfrac{4x - 3y - 1}{3x - 2y - 1}$.

Esercizio 4

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y'(1 + (y')^2) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y' + \dfrac{y}{(2e^{-x} - 1)} = -(e^{-x} + 1)y^4. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Esercizio 5

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y + 1}{t^2 + 1}.$$

1. Risolvere il problema di Cauchy con $y(0) = 0$.
2. Risolvere il problema di Cauchy con $y(0) = -1$.
3. Dimostrare che tutte le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale hanno un punto di flesso in $t = \frac{1}{2}$.

Esercizio 6

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3\sqrt{1 - y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

stabilire se si ha esistenza ed unicità locale di soluzioni e trovare l'intervallo massimale di soluzione.

Esercizio 7

Provare che le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = (u - 1)\arctan t \\ u(0) = \lambda \end{cases}$$

sono convesse se $\lambda > 1$ e concave se $\lambda < 1$.

Esercizio 8

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(t)\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Suggerimento: dimostrare che l'eventuale soluzione è periodica.

Esercizio 9

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{t^3+y^3}{ty^2} \\ y(e) = e\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

stabilire se si ha esistenza ed unicità locale di soluzioni e trovare l'intervallo massimale di esistenza di soluzione.

Esercizio 10

Discutere al variare di α il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Esercizio 11

Studiare al variare di $\alpha \geq 0$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t\sqrt{|y|} \\ y(0) = \alpha^2, \end{cases}$$

scrivere le soluzioni esplicite e tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

Esercizio 12

Trovare la soluzione e l'intervallo di esistenza massimale della seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+3t^2}{1+\tan^2 y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 13

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy \qquad n \geq 1,$$

provare che f_n è continua su $\mathbb{R}$ per ogni n e studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n.

Esercizio 14

Siano $a > 0$, $b > 1$. Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0, b]$ della successione di funzioni (f_n) definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} an^2x & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b}n^2x + \frac{ab}{b-1}n & \text{se } \frac{1}{n} \le x < \frac{b}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{b}{n} \le x \le b. \end{cases}$$

(Suggerimento: dopo aver studiato la convergenza puntuale, studiare la convergenza di $\int_0^b f_n(x)dx$.)

Esercizio 15

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0, 1]$ delle successioni

$$f_n(t) = t - \frac{t^n}{n} \qquad \text{e} \qquad f_n'.$$

Verificare poi che non sono verificate le ipotesi per lo scambio tra limite e derivata in $[0, 1]$ e che risulta

$$\frac{d}{dt} \lim_{n\to+\infty} f_n(t) \neq \lim_{n\to+\infty} f_n'(t).$$

Esercizio 16

Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(\ln n)^{nx}}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n} - e^{n/x}}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right).$$

Esercizio 17

Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n \qquad x \in \mathbb{R}^n$$