CdL in Matematica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Dodicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \leq x^2 \\ y - x^2 & \text{se } y > x^2 \\ y + x^2 & \text{se } y < -x^2 \end{cases}$.

Verificare che

a) $F(0,0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

b) $F(x,y)$ definisce implicitamente infinite funzioni di x in un intorno di $x_0 = 0$, passanti per l'origine degli assi.

c) Spiegare perché a) e b) non sono in contraddizione con il teorema del Dini.

Esercizio 2

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} x + \tan(x+y) + \log(1+x+z) = 0 \\ \tan y + yz + \arctan(x+y) = 0 \end{cases}$$

Verificare che, in un intorno dell'origine, si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza. Esprimere tale parametrizzazione al primo e al secondo ordine.

Esercizio 3

Dimostrare che l'equazione $(y-1) + x \arctan(x+z) + \cos z = 0$ definisce in un intorno di $(0,0,0)$ una ed una sola funzione $y = g(x,z)$. Stabilire la natura del punto $(0,0)$ per la funzione $g(x,z)$.

Esercizio 4

Sia $f(x,y) = (x+y)^2$ e sia $E = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$. Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f su E e calcolare $\int_E f(x,y)\,dxdy$

Esercizio 5

Determinare massimi e minimi delle funzioni $f(x,y) = x^4 - x^6 + (y - e^x)^2 \log(2 + x^2)$, $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

Esercizio 6

Indicato con σ il segmento $\{(x, y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y = 1\}$, si consideri la funzione

$$f(x, y) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + y \log\left(1 + \frac{1}{y}\right).$$

(a) Provare che $\inf_\sigma f = \log 2$, $\sup_\sigma f = \log 3$.

(b) Generalizzare il risultato al caso $f(x, y) = g(x) + g(y)$, con $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, di classe C^2 e strettamente concava.

Esercizio 7

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzione seguenti:

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx^2}$
2. $f_n(x) = \dfrac{3x + n}{x + n} \quad x \geq 0$