CdL in Matematica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Tredicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzione seguenti:

1. $f_n(x) = nxe^{-nx}$
2. $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$
3. $f_n(x) = n(\sin nx)e^{-nx}$
4. $f_n(x) = \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{1}{n^2}}$
5. $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x} \quad x \in [0, \pi]$
6. $f_n(x) = (\sin x)^n \quad x \in [0, \pi]$

Esercizio 2

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzione seguenti:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+(3nx)^2} \qquad f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2} \qquad f_n(x) = \sin\frac{x}{n^2+|\sin x|}.$$

Esercizio 3

Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ gli insiemi di convergenze puntuale ed uniforme della seguente successione di funzione

$$f_n(x) = \left(\sqrt{1+(nx)^\alpha} - \sqrt{(nx)^\alpha}\right) \quad x > 0.$$

Esercizio 4

Data la successione di funzione

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$$

verificare se

1. la successione converge uniformemente per ogni $x \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = \dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

Motivare le risposte.

Esercizio 5

Sia data la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^\alpha t e^{-nt} \qquad n \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) dimostrare che $f_n(t)$ converge a 0 puntualmente in $[0, +\infty)$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) dimostrare che f_n converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[r, +\infty)$ con $r > 0$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) dimostrare che f_n converge uniformemente in $[0, 1]$ se e solo se $\alpha < 1$;

d) dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt.$$

Esercizio 6

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ e in $[a, 2]$ con $a > 0$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n^3}{8}(x + \frac{1}{n})^3 & \text{se } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Esercizio 7

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$.

Esercizio 8

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1 + y^2} dy \qquad n \geq 1,$$

provare che f_n è continua su $\mathbb{R}$ per ogni n e studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n.

Esercizio 9

Siano $a > 0$, $b > 1$. Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0, b]$ della successione di funzioni (f_n) definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} an^2 x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b} n^2 x + \frac{ab}{b-1} n & \text{se } \frac{1}{n} \leq x < \frac{b}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{b}{n} \leq x \leq b. \end{cases}$$

(Suggerimento: dopo aver studiato la convergenza puntuale, studiare la convergenza di $\int_0^b f_n(x)dx$.)

Esercizio 10

Studiare convergenza puntuale e uniforme in $[0,1]$ delle successioni

$$f_n(t) = t - \frac{t^n}{n} \qquad \text{e} \qquad f_n'.$$

Verificare poi che non sono verificate le ipotesi per lo scambio tra limite e derivata in $[0,1]$ e che risulta

$$\frac{d}{dt} \lim_{n\to+\infty} f_n(t) \neq \lim_{n\to+\infty} f_n'(t).$$

Esercizio 11

Scrivere il polinomio di Taylor, relativo al punto $(0,0)$, fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = (1+x)^y \qquad f(x,y) = x\cos(x+y)$$

Esercizio 12

Scrivere i polinomi di Taylor di ordine n relativi al punto $(0,0)$ delle funzioni e^{xy}, e^{x+y}, $x\cos y$, $x^2\sin(x+y)$.

Esercizio 13

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(xy)}{x^2y^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y} - x\sin(xy) - 1}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x+\sin y) - (x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Esercizio 14

Sia $f(x,y)$ una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Dimostare che, se f é nulla nell'origine, esistono due funzioni $A(x,y)$ e $B(x,y)$ continue su $\mathbb{R}^2$ e tali che

$$f(x,y) = xA(x,y) + yB(x,y) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suggerimento: si consiglia di considerare la funzione $g(t) = f(tx,ty)$.