

CdL in Fisica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica 2 (Donatelli)

Quattordicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Si dimostri che il problema

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

ammette infinite soluzioni. Invece il problema

$$y' = y^{2/3} + a, \quad y(0) = 0, \quad a > 0$$

ammette un'unica soluzione.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 + y^2)te^{t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza e unicità. La soluzione esiste globalmente?

Esercizio 3

Date la successione di funzioni

$$f_n(x) = x^n \log x$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme di $f_n(x)$ e la convergenza puntuale, uniforme e totale di $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Esercizio 4

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1/n} - 1}{x^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^{5/2}} \cdot$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + e^{nx})^{nx} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(x^2 + n)}{1 + n^2|x|}.$$

Esercizio 5

Studiare la differenziabilità della funzione seguente: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x+y, |xy|)$.

Esercizio 6

Data

$$f(x, y, z) = xyz \log(x^2 + y^2),$$

dire se f si può estendere con continuità a tutto \mathbb{R}^3 . Studiare la differenziabilità di f .

Esercizio 7

Studiare l'insieme di definizione, la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \int_{-y^2}^{x^2} \frac{\sin(tx)}{t} dt.$$

Esercizio 8

Data la funzione

$$f(x, y) = x^y - 2y + 2x$$

si determini per quale direzione v si ha $D_v f(1, 1) = 2$. Qual è la direzione lungo la quale la funzione cresce di più vicino a $(1, 1)$?

Esercizio 9

Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 2 \text{ e } 0 \leq y < 1 - |x^2 - 1|\}$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \arctan(-x^2 + 2xy)$.

1. Dire se f possiede punti critici in \bar{A} e, in caso affermativo, determinarne la natura.
2. Dire se f possiede massimo e minimo assoluto in A e, in caso affermativo, determinarli.

Esercizio 10

Sia $F(x, y, z) = -(x-3)^2 + x \sin(y+1) \ln(z+2) + e^z - 4x + 7$. Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = z(x, y)$ in un intorno del punto $(1, -1, 0)$. Determinare il piano tangente alla superficie nel punto $(1, -1, 0)$.

Esercizio 11

Data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + z^2 \right) dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} dy + 2xz dz.$$

Determinare il dominio di definizione di ω e dire se è semplicemente connesso. Verificare se ω è una forma differenziale chiusa. Dimostrare se è una forma esatta e in tal caso calcolarne una primitiva.

Esercizio 12

Date le funzioni $y = \sqrt{\sin x}$ e $y = 2 \sin x$, sia $P_0 = (x_0, y_0)$ il punto di intersezione tra le due curve con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Siano poi

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < \frac{\pi}{2}, \sqrt{\sin x} \leq y \leq 2 \sin x\}, \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 2 \sin x \leq y \leq \sqrt{\sin x}\}, \\ f(x, y) &= \begin{cases} y \cos^4 x & \text{se } (x, y) \in A_1 \\ -y \cos^4 x & \text{se } (x, y) \in A_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Calcolare

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f(x, y) dx dy.$$

Esercizio 13

Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, 0 \leq y \leq \sqrt{3x}\}.$$

Calcolare il volume del cilindroide di base D e generatrici parallele all'asse z , relativo alla funzione $\sin \sqrt{x^2 + y^2}$.

Esercizio 14

Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{(x^2 + y^2)(2x^2 + 4y^2)}{x^3} dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2\}.$$

Esercizio 15

Verificare il teorema della divergenza per il campo $F(x, y, z) = (x, y^2, yz)$ e il dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 2\}$.

Esercizio 16

Dato il campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{x^2+x+y^2}{(1+x)^2+y^2}, -\frac{y}{(1+x)^2+y^2} \right)$, calcolare l'integrale $\int_{\gamma} F$, dove γ è la curva

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

orientata da $(1, 0)$ a $(0, 2)$.

Esercizio 17

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y^3 \cos z, x^3 e^z, -yz^2 \sin x)$$

uscite attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 5, 0 \leq z \leq \sqrt{5}\}.$$

Esercizio 18

Studiare i seguenti sistemi autonomi e tracciarne un ritratto di fase.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-2) \\ \dot{y} = (x^2+2)(y+1) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y - xy \\ \dot{y} = x + xy \end{cases}$$