

CdL in Matematica - A.A. 2016-2017

Esercizi di Analisi Matematica B (Donatelli)

Quattordicesima settimana - I Semestre

Esercizio 1

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e siano $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$, due norme su \mathbb{R}^n . Dimostrare che:

1a) le due norme sono equivalenti,

1b) $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, dove $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\}$.

Esercizio 2

Studiare la differenziabilità della funzione seguente: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, |xy|)$.

Esercizio 3

Data

$$f(x, y, z) = xyz \log(x^2 + y^2),$$

dire se f si può estendere con continuità a tutto \mathbb{R}^3 . Studiare la differenziabilità di f .

Esercizio 4

Studiare l'insieme di definizione, la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \int_{-y^2}^{x^2} \frac{\sin(tx)}{t} dt.$$

Esercizio 5

Data la funzione

$$f(x, y) = x^y - 2y + 2x$$

si determini per quale direzione v si ha $D_v f(1, 1) = 2$. Qual è la direzione lungo la quale la funzione cresce di più vicino a $(1, 1)$?

Esercizio 6

Sia $\Phi : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, la funzione definita da $\Phi(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$.

a) Calcolare lo jacobiano di Φ .

b) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e definiamo $g = f \circ \Phi$. Dimostrare che, se f è di classe C^1 e

$$x \frac{\partial g}{\partial x} - y \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

allora f dipende solo dalla sua prima variabile su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

- c) Dimostrare che, se f è di classe C^1 e risolve l'equazione $(f_x)^2 + 4(f_y)^2 = 1$, allora g è soluzione dell'equazione

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Esercizio 7

Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 2 \text{ e } 0 \leq y < 1 - |x^2 - 1|\}$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \arctan(-x^2 + 2xy)$.

1. Dire se f possiede punti critici in \bar{A} e, in caso affermativo, determinarne la natura.
2. Dire se f possiede massimo e minimo assoluto in A e, in caso affermativo, determinarli.

Esercizio 8

Sia $F(x, y, z) = -(x - 3)^2 + x \sin(y + 1) \ln(z + 2) + e^z - 4x + 7$. Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = z(x, y)$ in un intorno del punto $(1, -1, 0)$. Determinare il piano tangente alla superficie nel punto $(1, -1, 0)$.

Esercizio 9

Data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + z^2 \right) dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} dy + 2xz dz.$$

Determinare il dominio di definizione di ω e dire se è semplicemente connesso. Verificare se ω è una forma differenziale chiusa. Dimostrare se è una forma esatta e in tal caso calcolarne una primitiva.

Esercizio 10

Date le funzioni $y = \sqrt{\sin x}$ e $y = 2 \sin x$, sia $P_0 = (x_0, y_0)$ il punto di intersezione tra le due curve con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Siano poi

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 < x < \frac{\pi}{2}, \sqrt{\sin x} \leq y \leq 2 \sin x\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 2 \sin x \leq y \leq \sqrt{\sin x}\},$$

$$f(x, y) = \begin{cases} y \cos^4 x & \text{se } (x, y) \in A_1 \\ -y \cos^4 x & \text{se } (x, y) \in A_2. \end{cases}$$

Calcolare

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f(x, y) dx dy.$$

Esercizio 11

Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

Calcolare il volume del cilindroide di base D e generatrici parallele all'asse z , relativo alla funzione $\sin \sqrt{x^2 + y^2}$.

Esercizio 12

Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{(x^2 + y^2)(2x^2 + 4y^2)}{x^3} dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2\}.$$

Esercizio 13

Verificare il teorema della divergenza per il campo $F(x, y, z) = (x, y^2, yz)$ e il dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 2\}$.

Esercizio 14

Dato il campo vettoriale $F(x, y) = \left(\frac{x^2 + x + y^2}{(1+x)^2 + y^2}, -\frac{y}{(1+x)^2 + y^2} \right)$, calcolare l'integrale $\int_\gamma F$, dove γ è la curva

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0,$$

orientata da $(1, 0)$ a $(0, 2)$.

Esercizio 15

Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y^3 \cos z, x^3 e^z, -yz^2 \sin x)$$

uscite attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 5, 0 \leq z \leq \sqrt{5}\}.$$