CdL in Matematica - A.A. 2017-2018

Compito di Analisi Matematica B

10 luglio 2018

Esercizio 1

Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y, z) = x + y + z$ determinare $f(A)$ dove

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2 \leq -x^2 - y^2\}.$$

Esercizio 2

Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$, calcolare il flusso del campo F attraverso la superficie Σ e la circuitazione di F su $\partial^+\Sigma$, dove

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \mid y = x^2 + z^2,\ 2 \leq y \leq 4\right\}.$$

Esercizio 3

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della seguente successione di funzioni,

$$f_n(x) = \log(1 + e^{nx}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dire in quali insiemi A vale la seguente identità

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A dx.$$

Esercizio 4

Sia Γ il luogo di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} e^{2x+z} + \arctan y - \sin(y + x) - 1 = 0 \\ \log(1 + x^2) + \cos z + e^{2y+z} - 2 = 0 \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $y = y(x),\ z = z(x)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $(0, 0, 0)$. Qual è vettore tangente alla curva $x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, in $t = 0$?