CdL in Matematica - A.A. 2019-2020

Compito di Analisi Matematica B

16 gennaio 2020

Esercizio 1

Data la seguente funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = |x+y| \arctan |x|$$

1a) Dire se la funzione è continua in $\mathbb{R}^2$.

1b) Studiare l'esistenza delle derivate parziali in $\mathbb{R}^2$.

1c) Studiare la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2

Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = (x,y,0)$, calcolare il flusso di F e di $rotF$ attraverso la superficie Σ definita da

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ -\frac{1}{2} \leq z \leq 0\right\} \cup \left\{(x,y,z) \mid (z-1)^2 = x^2+y^2,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Esercizio 3

Studiare gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2 \log\left(1 + \frac{x}{n^2}\right), \quad x \geq 0.$$

Calcolare inoltre,

$$\lim_{n\to 0} \int_1^2 f_n(x)dx$$

Esercizio 4

Data la seguente equazione

$$f(x,y,z) = xe^{z+y} + \sin(x^2+z) + \cos(x+y) + (x-y)^2 - 1 = 0,$$

verificare che definisce in un intorno di $(0,0,0)$ un'unica funzione $z = g(x,y)$. Inoltre

4a) scrivere lo sviluppo al primo e al secondo ordine di $z = g(x,y)$,

4b) scrivere la matrice Hessiana di $g(x,y)$ in $(0,0)$,

4c) stabilire la natura del punto $(0,0)$ per la funzione $z = g(x,y)$.