CdL in Matematica - A.A. 2019-2020

Compito di Analisi Matematica B

18 febbraio 2020

Esercizio 1

Determinare i massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)e^z,$$

sull'insieme

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-1 \leq -x^2-y^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

Esercizio 2

Dato il seguente campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = \left(\tan x, \frac{y}{y^2+z^2}, \frac{z}{y^2+z^2}\right),$$

stabilire se esso è conservativo e calcolare

$$\int_\gamma F ds,$$

dove γ è parametrizzata con $r(t) = (\sin(t), \cos(t), t(t-\pi))$ per $t \in [0,\pi]$.

Esercizio 3

Studiare gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log(1 + \frac{n}{x^{2n}}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dire su quali insiemi $A \subset \mathbb{R}$, vale la relazione

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

Esercizio 4

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} \sin(x^2+z) + \log(\cos x) + ye^z = 0 \\ \log(1+y) + \sin(x+z) + ze^y + y = 0 \end{cases}.$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $x = x(z)$, $y = y(z)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $(0,0,0)$. Il vettore tangente in $(0,0,0)$ alla curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = t$ è parallelo al piano $x + y - z = 0$?